

PLAN DE ESTUDIO

Cómo usar los siete talleres para llegar al Parcial 1 con todo resuelto

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • Tiempo sugerido: Léelo primero

Antes de empezar: tres reglas que valen más que estudiar más horas

1. **Intenta antes de leer.** Un problema que leíste resuelto sin intentarlo no te enseñó nada. Uno que intentaste 15 minutos y luego leíste se te queda semanas.
2. **Sesiones cortas y separadas.** Cuatro sesiones de 45 minutos en cuatro días distintos rinden mucho más que una de tres horas. El cerebro consolida durmiendo, no acumulando.
3. **Escribe la respuesta antes de calcular.** “Espero que B suba más lento que A ”. Si al final el número contradice tu predicción, encontraste el error tú mismo.

1. Qué contiene cada archivo

Archivo	Tema	Semana del programa
Taller 0	Caja de herramientas: derivadas, integrales, vectores, las tres fórmulas maestras	Antes de todo
Taller 1	Movimiento rectilíneo (a función de t , v , s) y coordenadas x - y , proyectiles	Semana 1, Clase 1
Taller 2	Coordenadas n - t , radio de curvatura, coordenadas polares y cilíndricas	Semana 1 C2 y Semana 2 C1
Taller 3	Movimiento dependiente (poleas, cables) y movimiento relativo con ejes en traslación	Semana 2 C2 y Semana 3 C1
Taller 4	Cuerpo rígido: rotación, velocidad y aceleración relativas, centro instantáneo	Semana 3 C2 y Semana 4
Taller 5	Ejes móviles en rotación y aceleración de Coriolis (uniones deslizantes)	Semana 5, Clase 1
Simulacro	Tres puntos en formato de parcial real, cronometrado	Todo el Parcial 1

Cada taller tiene la misma estructura: una sección de teoría mínima, la **Parte A** con los enunciados para resolver solo, y la **Parte B** con la solución paso a paso. Además hay un visualizador web con los ocho mecanismos animados.

2. Calendario sugerido de dos semanas

Día	Qué haces	Cómo sabes que quedó
1	Taller 0 completo (1 h)	Los 8 ejercicios de calentamiento te salen sin mirar
2	Taller 1, Parte A (problemas 1.1 a 1.3)	Sabes decir qué método usar solo con leer el enunciado
3	Taller 1, resto + revisar Parte B	Explicas por qué distancia $\neq$ desplazamiento
4	Taller 2, problemas 2.1 a 2.3 ($n-t$)	Calculas ρ sin buscar la fórmula
5	Taller 2, problemas 2.4 a 2.6 (polares)	Escribes las dos fórmulas polares de memoria
6	<i>Descanso o repaso ligero</i>	Rehaces el 2.5 en 10 minutos
7	Taller 3 completo	Planteas la ecuación de la cuerda sin dudar
8	Taller 4, problemas 4.1 a 4.3	Ubicas el CIR de una barra en 30 segundos
9	Taller 4, problemas 4.4 y 4.5 (biela-manivela)	Sacas ω_{AB} y v_B en menos de 10 minutos
10	Taller 5, problemas 5.1 a 5.3	Nombras los cuatro términos de la aceleración
11	Taller 5, problemas 5.4 y 5.5	El término de Coriolis nunca se te olvida
12	Simulacro cronometrado (2 h)	Terminas los tres puntos dentro del tiempo
13	Corriges el simulacro y rehaces lo que falló	Sabes exactamente cuál es tu punto débil
14	Escribes tu propia hoja de fórmulas de memoria	Cabe en una cara y no te falta nada

3. Cómo se reparten los temas en los parciales reales

Revisando siete parciales de semestres anteriores (2020-II a 2026-I), el patrón es muy estable:

Tema	Frecuencia	Dónde practicarlo
Coordenadas polares / ranura deslizante (Coriolis)	Casi siempre el punto 1	Talleres 2 y 5
Movimiento relativo con cable o brazo que gira	Muy frecuente	Taller 3, problema 3.6
Cuerpo rígido con pasadores (biela, barras)	Frecuente	Taller 4, problemas 4.4–4.5
Movimiento dependiente con geometría no lineal	Aparece como punto 2	Taller 3, problema 3.3
Rectilíneo con $a = f(v)$ o $a = f(s)$	Ocasional	Taller 1, problemas 1.3 y 1.4

Dónde se pierden los puntos, en orden

1. Olvidar el término de Coriolis $2\dot{r}\dot{\theta}$.
2. Derivar $r(\theta)$ sin regla de la cadena (falta el $\dot{\theta}$).
3. Usar $v = v_0 + at$ cuando la aceleración **no** es constante.
4. Confundir el orden de subíndices en $\vec{v}_{A/B}$.
5. Calculadora en grados cuando la fórmula pide radianes (y al revés).
6. Usar el CIR para calcular aceleraciones. No sirve para eso.

4. La hoja de una sola cara

Cuando llegues al día 14, esto es todo lo que debe caber en tu hoja:

Rectilíneo	$v = \dot{s}, \quad a = \dot{v}, \quad a \, ds = v \, dv$
Cartesianas	$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}, \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$
Normal-tangencial	$\vec{a} = \dot{v}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n, \quad \rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{ y'' }$
Polares	$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$
Dependiente	$L = \text{constante} \Rightarrow \text{derivar dos veces}$
Relativo (traslación)	$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$
Cuerpo rígido	$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$
Marco rotatorio	$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$ $\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$
Producto cruz	$\omega \hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = \omega(-y\hat{i} + x\hat{j})$

Lo último

Si llegas al parcial sabiendo *reconocer* qué tipo de problema es cada punto, ya ganaste la mitad. La otra mitad es aritmética cuidadosa. Ninguna de las dos cosas se aprende leyendo: se aprenden resolviendo. Estos talleres tienen 35 problemas resueltos. Resuélvelos.

TALLER 0

Caja de herramientas: lo mínimo que debes tener automatizado

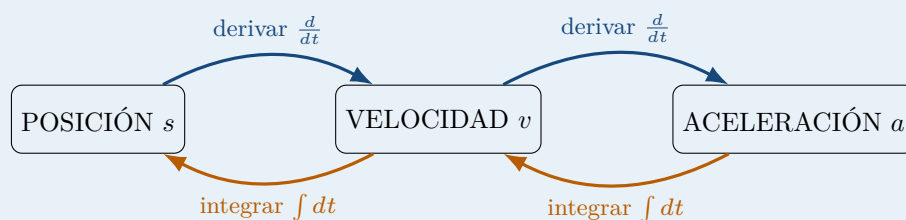
Semana del programa: Previo a la Semana 1 • Tiempo sugerido: 1 hora

Cómo usar este taller

Este taller **no** es dinámica todavía. Son las cinco herramientas que vas a usar en *todos* los problemas del Parcial 1. Si estas cinco cosas te salen sin pensar, el parcial deja de ser difícil y pasa a ser largo. Léelo una vez, haz los ejercicios, y vuelve a esta hoja cada vez que te trabes en los talleres 1 a 5.

1. La idea que lo gobierna todo

La escalera posición → velocidad → aceleración



Bajar la escalera (de s a a) es **derivar**. **Subir** la escalera (de a a s) es **integrar** y aparecen constantes que se hallan con las condiciones iniciales.

Herramienta 1: las tres ecuaciones que nunca cambian

$$v = \frac{ds}{dt} \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \boxed{a ds = v dv}$$

La tercera sale de combinar las dos primeras y es la que salva cuando **no aparece el tiempo** en el problema.

Qué usar según lo que te den

Te dan	Quieres	Usa
$s(t)$	v, a	derivar dos veces
$a = \text{constante}$	v, s	$v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$; $v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$
$a = f(t)$	$v(t), s(t)$	$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt$, luego otra vez
$a = f(v)$	t o s	$\int \frac{dv}{f(v)} = \int dt$ ó $\int \frac{v dv}{f(v)} = \int ds$
$a = f(s)$	$v(s)$	$\int v dv = \int f(s) ds$

Cuidado

Las fórmulas $v = v_0 + at$ y $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ **solo sirven si a es constante**. Si en el enunciado a depende de t , de v o de s , usarlas es un cero seguro. Esa es la trampa favorita del Parcial 1.

2. Herramienta 2: derivadas e integrales que sí vas a usar**Derivadas**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t^n) &= n t^{n-1} \\ \frac{d}{dt}(\sin \theta) &= \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}(\cos \theta) &= -\sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}(\tan \theta) &= \sec^2 \theta \cdot \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}(uv) &= \dot{u}v + u\dot{v} \\ \frac{d}{dt}\sqrt{u} &= \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}\end{aligned}$$

Integrales

$$\begin{aligned}\int t^n dt &= \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ \int \frac{dv}{v} &= \ln v \\ \int \frac{dv}{v^2} &= -\frac{1}{v} \\ \int \sin \theta d\theta &= -\cos \theta \\ \int v dv &= \frac{v^2}{2}\end{aligned}$$

El error #1 de todo el curso

Cuando derivas algo que depende de θ y θ depende del tiempo, **siempre** aparece $\dot{\theta}$ multiplicando (regla de la cadena):

$$\frac{d}{dt}(0,4 \cos \theta) = -0,4 \sin \theta \cdot \dot{\theta} \quad (\text{no es } -0,4 \sin \theta)$$

Olvidar ese $\dot{\theta}$ es lo que más puntos cuesta en los parciales de coordenadas polares.

3. Herramienta 3: vectores en 2D sin miedo

Todo vector se escribe con dos números (componentes) o con magnitud y ángulo:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}, \quad |\vec{\mathbf{A}}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$$A_x = |\vec{\mathbf{A}}| \cos \theta, \quad A_y = |\vec{\mathbf{A}}| \sin \theta$$

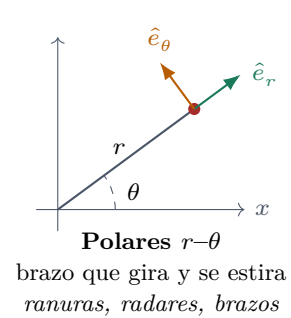
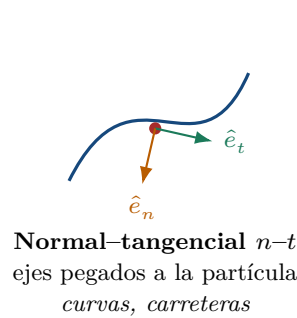
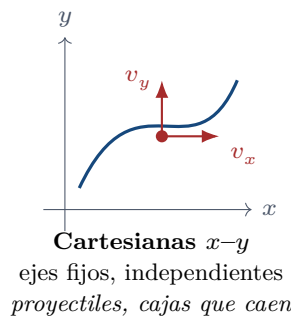
Producto cruz: el que usarás mil veces en cuerpo rígido

En movimiento plano, $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ (sale de la hoja si es antihorario). Entonces:

$$\omega \hat{k} \times (x \hat{i} + y \hat{j}) = \omega(-y \hat{i} + x \hat{j})$$

Regla práctica: intercambias x e y , le pones menos al que quedó primero, y multiplicas por ω . Eso es todo. El resultado siempre es **perpendicular** al vector original.

4. Herramienta 4: los tres sistemas de coordenadas



Las tres fórmulas maestras (apréndelas de memoria)

Cartesianas: $\vec{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j}, \quad \vec{a} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j}$

Normal-tangencial: $\vec{v} = v \hat{e}_t, \quad \vec{a} = \underbrace{\dot{v}}_{a_t} \hat{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{a_n} \hat{e}_n$

Polares: $\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$

Cómo leer la fórmula polar en español

- $\dot{r}$: qué tan rápido te alejas del centro. $r \dot{\theta}$: qué tan rápido giras alrededor.
- $\ddot{r}$: qué tan rápido cambia tu rapidez de alejamiento.
- $-r \dot{\theta}^2$: el término **centrípeto** (siempre apunta al centro, por eso el menos).
- $r \ddot{\theta}$: el giro se está acelerando.
- $2 \dot{r} \dot{\theta}$: el término de **Coriolis**. Aparece *solo* cuando te mueves hacia afuera **y** giras al mismo tiempo. Es el que todo el mundo olvida.

5. Herramienta 5: el radio de curvatura ρ

Si te dan la trayectoria como $y = f(x)$:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}$$

Si el camino es un círculo de radio R , entonces $\rho = R$ y ya. Si el camino es recto, $\rho = \infty$ y por eso $a_n = 0$.

6. Ejercicios de calentamiento

Resuélvelos en 30 minutos. Las respuestas están al final de la página.

- C1.** Si $s = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (m), halle $v(t)$ y $a(t)$, y evalúe en $t = 2$ s.
- C2.** Si $\theta = 3t^2$ rad, halle $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ en $t = 1$ s.
- C3.** Si $r = 0,5 \cos \theta$ y $\dot{\theta} = 4$ rad/s constante, halle $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ cuando $\theta = 60^\circ$. (*Ojo con la regla de la cadena.*)
- C4.** Calcule $\omega \hat{k} \times \vec{r}$ si $\omega = 5$ rad/s y $\vec{r} = (0,3\hat{i} - 0,4\hat{j})$ m.
- C5.** Un vector tiene $A_x = -6$ y $A_y = 8$. Halle magnitud y ángulo respecto al eje x .
- C6.** La trayectoria es $y = 0,25x^2$. Halle ρ en $x = 2$ m.
- C7.** Si $a = 6t - 4$ (m/s²), $v_0 = 2$ m/s y $s_0 = 0$, halle $v(t)$ y $s(t)$.
- C8.** Si $a = -0,5v$ (m/s²) y $v_0 = 10$ m/s, halle $v(t)$. (*Separate variables.*)

Respuestas

- C1.** $v = 6t^2 - 10t$, $a = 12t - 10$; en $t = 2$: $v = 4$ m/s, $a = 14$ m/s². **C2.** $\dot{\theta} = 6t = 6$ rad/s, $\ddot{\theta} = 6$ rad/s².
C3. $\dot{r} = -0,5 \sin \theta \dot{\theta} = -1,732$ m/s; $\ddot{r} = -0,5 \cos \theta \dot{\theta}^2 = -4,0$ m/s². **C4.** $5\hat{k} \times (0,3\hat{i} - 0,4\hat{j}) = 2,0\hat{i} + 1,5\hat{j}$ (m/s). **C5.** $|\vec{A}| = 10$, $\theta = 126,87^\circ$. **C6.** $dy/dx = 0,5x = 1$; $d^2y/dx^2 = 0,5$; $\rho = 2^{3/2}/0,5 = 5,657$ m.
C7. $v = 3t^2 - 4t + 2$; $s = t^3 - 2t^2 + 2t$. **C8.** $v = 10e^{-0,5t}$ m/s.

TALLER 1

Cinemática de partícula: movimiento rectilíneo y coordenadas $x-y$

Semana del programa: Semana 1, Clase 1 • Tiempo sugerido: 2 horas

Cómo trabajar este taller

Primero intenta la **Parte A** solo, con el formulario al lado y sin mirar la Parte B. Dale 20 minutos por problema; si te trabas, lee *solo* la caja “Ruta de solución” del problema en la Parte B y vuelve a intentar. Solo al final compara todo el desarrollo. Lo que aprende no es leer la solución, es haber intentado antes de leerla.

1. Lo que necesitas de este tema

Las cuatro situaciones del movimiento rectilíneo

Caso	Cómo lo reconoces	Qué haces
$s(t)$ dada	te dan la posición como función del tiempo	derivas: $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$
$a = f(t)$	la aceleración depende del <i>tiempo</i>	$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt$
$a = f(v)$	la aceleración depende de la <i>velocidad</i> (resistencia del aire, agua)	$\int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = \int dt$ ó $\int \frac{v dv}{f(v)} = \int ds$
$a = f(s)$	la aceleración depende de la <i>posición</i> (resortes, imanes)	$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds$

Movimiento curvilíneo en $x-y$: el principio de independencia

El movimiento horizontal y el vertical **no se enteran uno del otro**. Se resuelven por separado y solo comparten una cosa: **el tiempo**.

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}, \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$$

Proyectil ($a_x = 0$, $a_y = -g = -9,81 \text{ m/s}^2$):

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_y = v_{0y} - gt$$

con $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ y $v_{0y} = v_0 \sin \theta$.

Distancia recorrida vs. desplazamiento

Desplazamiento = $s_{final} - s_{inicial}$ (puede ser negativo o cero).

Distancia recorrida = suma de todos los tramos *en valor absoluto*. Para calcularla hay que encontrar primero dónde $v = 0$, porque ahí el cuerpo se devuelve. Si no buscas esos puntos, la distancia te va a dar mal.

PARTE A — Enunciados

Problema 1.1 – Posición dada, tipo Hibbeler 12-9

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por

$$s = t^3 - 9t^2 + 15t + 5 \quad (\text{m, con } t \text{ en segundos})$$

Determine:

- (a) Las expresiones de $v(t)$ y $a(t)$.
- (b) Los instantes en que la partícula se detiene.
- (c) El desplazamiento y la **distancia total recorrida** entre $t = 0$ y $t = 6$ s.

Problema 1.2 – Aceleración función del tiempo

Una partícula parte del reposo en el origen con una aceleración $a = (2t - 6) \text{ m/s}^2$.

- (a) Halle $v(t)$ y $s(t)$.
- (b) ¿En qué instante la partícula vuelve a tener velocidad cero?
- (c) ¿Cuál es su posición y qué distancia recorrió hasta ese instante?

Problema 1.3 – Aceleración función de la velocidad

Una lancha se mueve en línea recta a 8,0 m/s cuando apaga el motor. El agua le produce una desaceleración $a = -0,6 v^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$, con v en m/s. Determine:

- (a) El tiempo que tarda en bajar a 2,0 m/s.
- (b) La distancia que recorre en ese lapso.
- (c) Su velocidad 1 segundo después de apagar el motor.

Problema 1.4 – Aceleración función de la posición

Un bloque unido a un resorte se mueve sobre una superficie lisa con $a = -100 s \text{ (m/s}^2\text{)}$, donde s se mide en metros desde la posición sin deformar del resorte. Cuando $s = 0$ la velocidad del bloque es 5,0 m/s.

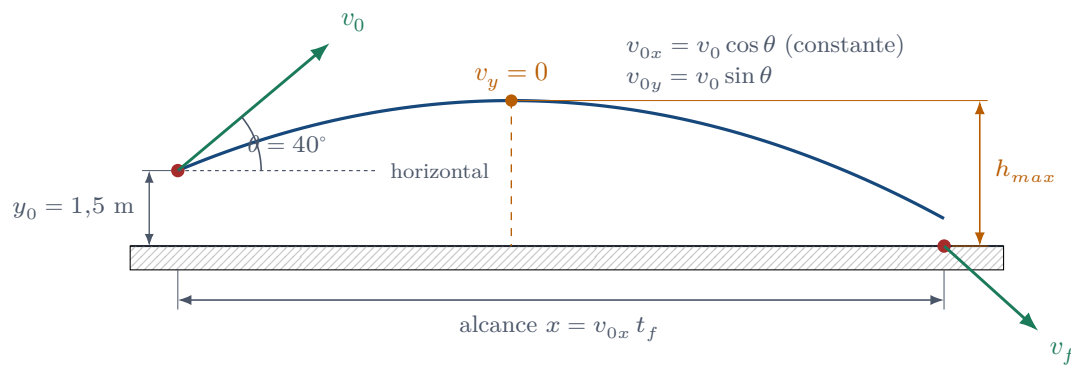
- (a) Halle la expresión $v(s)$.
- (b) Halle la velocidad cuando $s = 0,20$ m.
- (c) ¿Cuál es el desplazamiento máximo que alcanza el bloque?

Problema 1.5 – proyectil, tipo Beer 11.97

Una pelota se lanza desde una altura de 1,5 m con una rapidez inicial de 25 m/s formando 40° con la horizontal. Determine:

- (a) El tiempo total de vuelo hasta tocar el suelo.
- (b) El alcance horizontal.
- (c) La altura máxima medida desde el suelo.
- (d) La magnitud y dirección de la velocidad justo antes del impacto.

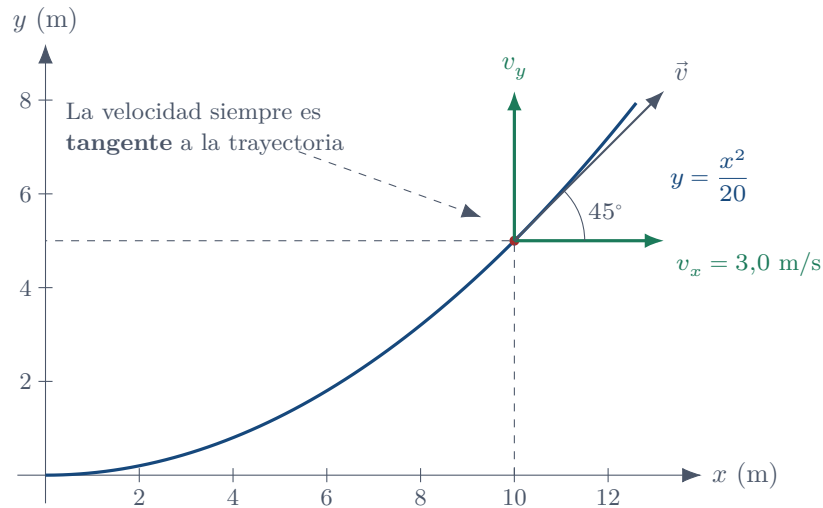
Desprecie la resistencia del aire, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Problema 1.6 – Trayectoria dada $y = f(x)$

Una partícula recorre la trayectoria $y = \frac{x^2}{20}$ (con x, y en metros), y la componente horizontal de su velocidad se mantiene constante en $v_x = 3,0$ m/s. Para el instante en que $x = 10$ m determine:

- Las componentes v_y y a_y .
- La magnitud y dirección del vector velocidad.
- La magnitud del vector aceleración.



Guarde este resultado: en el Taller 2 va a resolver el mismo problema con coordenadas n - t y deben coincidir.

PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 1.1

Ruta de solución

Te dan $s(t)$, así que **derivas dos veces** y listo. La única parte con truco es la (c): para la distancia hay que partir el recorrido en los instantes donde $v = 0$, porque ahí la partícula cambia de sentido.

PASO 1 Derivar para obtener velocidad y aceleración

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 15 \quad (\text{m/s}) \qquad a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18 \quad (\text{m/s}^2)$$

PASO 2 Encontrar dónde se detiene ($v = 0$)

$$3t^2 - 18t + 15 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 5) = 0$$

$$t_1 = 1 \text{ s} \qquad t_2 = 5 \text{ s}$$

En esos dos instantes la partícula se para y se devuelve.

PASO 3 Evaluar la posición en los cuatro puntos clave

$$s(0) = 0 - 0 + 0 + 5 = 5 \text{ m}$$

$$s(1) = 1 - 9 + 15 + 5 = 12 \text{ m}$$

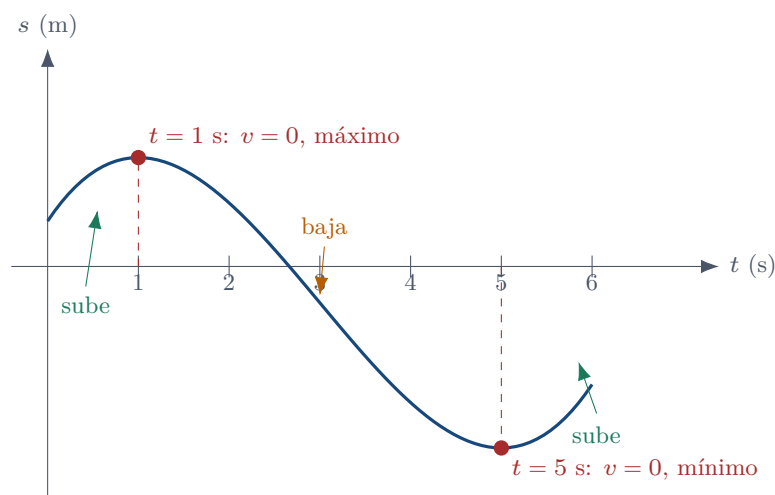
$$s(5) = 125 - 225 + 75 + 5 = -20 \text{ m}$$

$$s(6) = 216 - 324 + 90 + 5 = -13 \text{ m}$$

PASO 4 Desplazamiento

$$\Delta s = s(6) - s(0) = -13 - 5 = -18 \text{ m}$$

El signo negativo dice que terminó 18 m a la izquierda de donde arrancó.



PASO 5 Distancia recorrida: sumar tramo por tramo en valor absoluto

$$\text{Tramo } 0 \rightarrow 1 : |12 - 5| = 7 \text{ m} \quad (\text{va hacia } +)$$

$$\text{Tramo } 1 \rightarrow 5 : |-20 - 12| = 32 \text{ m} \quad (\text{se devolvió})$$

$$\text{Tramo } 5 \rightarrow 6 : |-13 - (-20)| = 7 \text{ m} \quad (\text{vuelve hacia } +)$$

$$s_T = 7 + 32 + 7 = 46 \text{ m}$$

Respuesta: (a) $v = 3t^2 - 18t + 15$, $a = 6t - 18$. (b) $t = 1 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$. (c) Desplazamiento = -18 m ; distancia recorrida = 46 m .

Chequeo de sentido común

La distancia (46 m) tiene que ser **mayor** que el valor absoluto del desplazamiento (18 m) siempre que la partícula se haya devuelto alguna vez. Aquí se devolvió dos veces, así que $46 > 18$ tiene todo el sentido. Si te hubiera dado 18 m de distancia, sabrías que olvidaste partir el recorrido.

Problema 1.2**Ruta de solución**

a depende del tiempo $\Rightarrow$ se integra respecto a t . Una integral te lleva de a a v , otra de v a s . Las constantes salen de “parte del reposo en el origen” ($v_0 = 0$, $s_0 = 0$).

PASO 1 De a a v

$$\int_0^v dv = \int_0^t (2t - 6) dt \Rightarrow v = t^2 - 6t \quad (\text{m/s})$$

PASO 2 De v a s

$$\int_0^s ds = \int_0^t (t^2 - 6t) dt \Rightarrow s = \frac{t^3}{3} - 3t^2 \quad (\text{m})$$

PASO 3 Cuándo vuelve a estar en reposo

$$t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t(t - 6) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ s} \quad (t = 0 \text{ es el arranque})$$

PASO 4 Posición y distancia

$$s(6) = \frac{216}{3} - 3(36) = 72 - 108 = -36 \text{ m}$$

Entre $t = 0$ y $t = 6 \text{ s}$ la velocidad $v = t(t - 6)$ es **negativa todo el tiempo** (porque $0 < t < 6$), así que la partícula nunca se devolvió: la distancia recorrida es simplemente $|-36| = 36 \text{ m}$.

Respuesta: (a) $v = t^2 - 6t$, $s = \frac{t^3}{3} - 3t^2$. (b) $t = 6 \text{ s}$. (c) $s = -36 \text{ m}$ y recorrió 36 m .

Cuidado

Fíjate que la aceleración *sí* cambia de signo en $t = 3$ s (ahí $a = 0$), pero la *velocidad* no. Que la aceleración cambie de signo no significa que el cuerpo se devuelva: solo significa que deja de frenar y empieza a acelerar. El cuerpo se devuelve cuando v cambia de signo, no a .

Problema 1.3**Ruta de solución**

a depende de v . Entonces:

- si quieres **tiempo**, usa $a = \frac{dv}{dt}$ y separas variables;
- si quieres **distancia**, usa $a ds = v dv$, porque ahí no aparece el tiempo.

PASO 1 (a) Tiempo: usar $a = dv/dt$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -0,6 v^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -0,6 dt \\ \int_8^2 v^{-2} dv &= \int_0^t -0,6 dt \Rightarrow \left[-\frac{1}{v} \right]_8^2 = -0,6 t \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} &= -0,6 t \Rightarrow -0,375 = -0,6 t \Rightarrow t = 0,625 \text{ s}\end{aligned}$$

PASO 2 (b) Distancia: usar $a ds = v dv$

$$\begin{aligned}-0,6 v^2 ds &= v dv \Rightarrow ds = -\frac{dv}{0,6 v} \\ \int_0^x ds &= -\frac{1}{0,6} \int_8^2 \frac{dv}{v} \Rightarrow x = \frac{1}{0,6} \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \frac{\ln 4}{0,6} = 2,31 \text{ m}\end{aligned}$$

PASO 3 (c) Velocidad al cabo de 1 s

De la integral del Paso 1 en forma general:

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -0,6 t \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + 0,6 v_0 t} = \frac{8}{1 + 0,6(8)(1)} = 1,379 \text{ m/s}$$

Respuesta: (a) $t = 0,625$ s. (b) $x = 2,31$ m. (c) $v(1 \text{ s}) = 1,38$ m/s.

Chequeo de sentido común

La velocidad nunca llega a cero matemáticamente (la fórmula $v = v_0/(1 + kv_0 t)$ solo se acerca a cero cuando $t \rightarrow \infty$). Eso es físicamente correcto: si la resistencia es proporcional a v^2 , cuando la lancha va muy lento casi no hay frenado. Si te dio un tiempo finito para que $v = 0$, revisa la integral.

Problema 1.4

Ruta de solución

a depende de s y **no hay tiempo en el enunciado**. Bandera roja para usar $a ds = v dv$.

PASO 1 Aplicar $v dv = a ds$

$$\int_5^v v dv = \int_0^s (-100 s) ds$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{5^2}{2} = -50 s^2 \Rightarrow v^2 = 25 - 100 s^2$$

$$v = \sqrt{25 - 100 s^2} \text{ (m/s)}$$

PASO 2 Velocidad en $s = 0,20 \text{ m}$

$$v = \sqrt{25 - 100(0,04)} = \sqrt{21} = 4,583 \text{ m/s}$$

PASO 3 Desplazamiento máximo (donde se detiene)

El bloque llega lo más lejos posible cuando $v = 0$:

$$25 - 100 s^2 = 0 \Rightarrow s_{max} = 0,50 \text{ m}$$

Respuesta: (a) $v^2 = 25 - 100s^2$. (b) $v = 4,58 \text{ m/s}$. (c) $s_{max} = 0,50 \text{ m}$.

Lo que acabas de resolver es un movimiento armónico simple

La ecuación $a = -100 s$ tiene la forma $a = -\omega^2 s$ con $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Ese es exactamente el tema de **Vibraciones** (semana 13). La amplitud es $A = v_0/\omega = 5/10 = 0,5 \text{ m}$, que es justo el s_{max} que hallaste. Ya viste el final de la película.

Problema 1.5

Ruta de solución

Proyectil = dos problemas independientes que comparten el tiempo. En x : velocidad constante. En y : aceleración constante $-g$. Escribes las dos ecuaciones, hallas el tiempo con la condición de “llega al suelo” ($y = 0$), y con ese tiempo sacas todo lo demás.

PASO 1 Descomponer la velocidad inicial

$$v_{0x} = 25 \cos 40^\circ = 19,151 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 25 \sin 40^\circ = 16,070 \text{ m/s}$$

PASO 2 (a) Tiempo de vuelo: imponer $y = 0$

Tomando el suelo como $y = 0$ y el lanzamiento en $y_0 = 1,5 \text{ m}$:

$$0 = 1,5 + 16,070 t - 4,905 t^2$$

$$4,905 t^2 - 16,070 t - 1,5 = 0$$

$$t = \frac{16,070 + \sqrt{16,070^2 + 4(4,905)(1,5)}}{2(4,905)} = \frac{16,070 + 16,961}{9,81} = 3,367 \text{ s}$$

(la raíz negativa se descarta: es un tiempo “antes” del lanzamiento).

PASO 3 (b) Alcance horizontal

$$x = v_{0x} t = 19,151(3,367) = 64,5 \text{ m}$$

PASO 4 (c) Altura máxima: donde $v_y = 0$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(h - y_0) \Rightarrow h = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = 1,5 + \frac{16,070^2}{19,62} = 1,5 + 13,16 = 14,66 \text{ m}$$

PASO 5 (d) Velocidad de impacto

$$v_x = 19,151 \text{ m/s} \quad (\text{no cambia nunca})$$

$$v_y = 16,070 - 9,81(3,367) = -16,961 \text{ m/s} \quad (\text{hacia abajo})$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{19,151^2 + 16,961^2} = 25,58 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{16,961}{19,151}\right) = 41,5^\circ \text{ por debajo de la horizontal}$$

Respuesta: (a) $t = 3,37 \text{ s}$ (b) $x = 64,5 \text{ m}$ (c) $h_{max} = 14,7 \text{ m}$ (d) $v = 25,6 \text{ m/s}$ a $41,5^\circ$ bajo la horizontal.

Chequeo de sentido común

La velocidad de impacto (25,58 m/s) es apenas un poco mayor que la de lanzamiento (25 m/s). Correcto: cayó 1,5 m más abajo de donde salió, así que ganó un poquito de energía. Si te hubiera dado 40 m/s, algo está mal. Y el ángulo de impacto ($41,5^\circ$) es apenas mayor que el de salida (40°), por la misma razón.

Problema 1.6

Ruta de solución

Te dan la *forma del camino* $y = f(x)$, no $x(t)$ ni $y(t)$. El truco es derivar la ecuación del camino **respecto al tiempo**, usando la regla de la cadena. Cada vez que derives y aparece $\dot{x}$ multiplicando.

PASO 1 Derivar la trayectoria una vez

$$y = \frac{x^2}{20} \Rightarrow \dot{y} = \frac{2x \dot{x}}{20} = \frac{x \dot{x}}{10}$$

En $x = 10 \text{ m}$ con $\dot{x} = 3 \text{ m/s}$:

$$v_y = \dot{y} = \frac{10(3)}{10} = 3,0 \text{ m/s}$$

PASO 2 Derivar otra vez para la aceleración

$$\ddot{y} = \frac{1}{10} (\dot{x} \cdot \dot{x} + x \cdot \ddot{x}) = \frac{\dot{x}^2 + x \ddot{x}}{10}$$

Como v_x es constante, $\ddot{x} = 0$:

$$a_y = \ddot{y} = \frac{3^2 + 0}{10} = 0,90 \text{ m/s}^2$$

PASO 3 Armar los vectores

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 3,0\hat{i} + 3,0\hat{j} \text{ (m/s)} & \Rightarrow |\vec{v}| &= \sqrt{9+9} = 4,243 \text{ m/s}, \quad \theta_v = 45^\circ \\ \vec{a} &= 0\hat{i} + 0,90\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)} & \Rightarrow |\vec{a}| &= 0,90 \text{ m/s}^2 \text{ (vertical, hacia arriba)} \end{aligned}$$

Respuesta: (a) $v_y = 3,0 \text{ m/s}$, $a_y = 0,90 \text{ m/s}^2$. (b) $|\vec{v}| = 4,24 \text{ m/s}$ a 45° . (c) $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

La pendiente del camino en $x = 10$ es $dy/dx = x/10 = 1$, o sea 45° . Y la velocidad tiene que ser **tangente** al camino, así que su ángulo debe ser 45° . Coincide. Este chequeo (¿la velocidad es tangente al camino?) funciona en todo problema de trayectoria dada.

Hoja de respuestas rápida — Taller 1

- 1.1 $v = 3t^2 - 18t + 15$; $a = 6t - 18$; $t = 1$ y 5 s ; $\Delta s = -18 \text{ m}$; $s_T = 46 \text{ m}$.
- 1.2 $v = t^2 - 6t$; $s = t^3/3 - 3t^2$; $t = 6 \text{ s}$; $s = -36 \text{ m}$; 36 m recorridos.
- 1.3 $t = 0,625 \text{ s}$; $x = 2,31 \text{ m}$; $v(1 \text{ s}) = 1,38 \text{ m/s}$.
- 1.4 $v^2 = 25 - 100s^2$; $v(0,2) = 4,58 \text{ m/s}$; $s_{max} = 0,50 \text{ m}$.
- 1.5 $t = 3,37 \text{ s}$; $x = 64,5 \text{ m}$; $h = 14,7 \text{ m}$; $v = 25,6 \text{ m/s}$ a $41,5^\circ$.
- 1.6 $v_y = 3,0 \text{ m/s}$; $a_y = 0,90 \text{ m/s}^2$; $v = 4,24 \text{ m/s}$ a 45° ; $a = 0,90 \text{ m/s}^2$.

TALLER 2

Coordenadas normal-tangencial ($n-t$), polares (r, θ) y cilíndricas

Semana del programa: Semana 1, Clase 2 y Semana 2, Clase 1 • **Tiempo sugerido:** 2,5 horas

Por qué este taller es el más importante del Parcial 1

De los siete parciales anteriores que revisamos, **seis** tenían un punto de coordenadas polares como primer problema. Si dominas la fórmula polar y sabes de dónde sacar r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ de la geometría del mecanismo, ya tienes medio parcial ganado.

1. Lo que necesitas de este tema

Coordenadas normal-tangencial: el sistema que viaja contigo

Los ejes n y t no están fijos en el piso: están **pegados a la partícula**. $\hat{e}_t$ apunta siempre hacia donde va, $\hat{e}_n$ apunta siempre hacia **el centro de la curva**.

$$\vec{v} = v \hat{e}_t \quad \vec{a} = \underbrace{\dot{v}}_{\text{cambia la rapidez}} \hat{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{\text{cambia la dirección}} \hat{e}_n$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

La frase que resume todo $n-t$

a_t te dice *si estás acelerando o frenando*. a_n te dice *qué tan cerrada es la curva*. Si vas en línea recta, $\rho = \infty$ y $a_n = 0$. Si vas a rapidez constante en una curva, $a_t = 0$ pero $a_n \neq 0$ y **por eso sí hay aceleración aunque el velocímetro no se mueva**.

Coordenadas polares: el brazo que gira y se estira

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

Término	Qué significa físicamente
$v_r = \dot{r}$	rapidez con que te alejas (o acercas) del origen
$v_\theta = r \dot{\theta}$	rapidez con que giras alrededor del origen
$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$	aceleración de alejamiento – aceleración centrípeta
$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$	aceleración angular + Coriolis

Cilíndricas = polares + un eje z que va por libre:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{e}_z$$

Los dos errores que matan en polares

1. Olvidar el $2\dot{r}\dot{\theta}$ (Coriolis). Si r cambia y el brazo gira, ese término **existe** aunque $\ddot{\theta} = 0$.
2. Derivar $r(\theta)$ sin regla de la cadena. Si $r = 0,4 \cos \theta$, entonces $\dot{r} = -0,4 \sin \theta \cdot \dot{\theta}$ y $\ddot{r} = -0,4(\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta})$. Ese $\dot{\theta}$ es obligatorio.

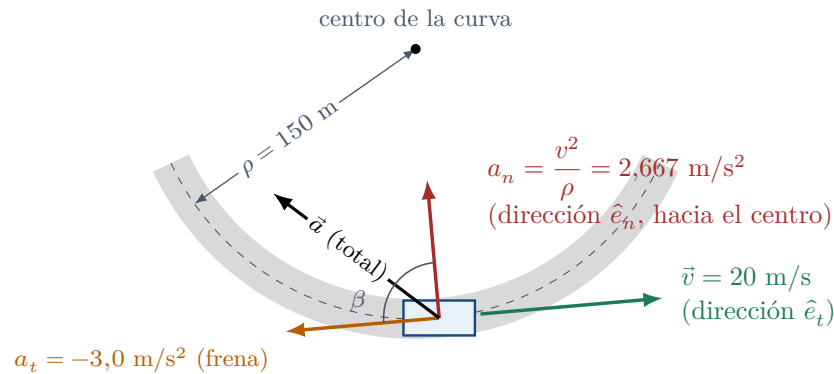
Procedimiento infalible para un problema de polares

1. Dibuja $\hat{e}_r$ (del origen hacia la partícula) y $\hat{e}_\theta$ (90° adelante, en el sentido en que crece θ).
2. Escribe la relación geométrica $r = r(\theta)$ o mide r directamente si te la dan.
3. Deriva r dos veces *respecto al tiempo*, con regla de la cadena.
4. Anota qué sabes de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ (“gira a velocidad constante” $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$).
5. Reemplaza en las dos fórmulas maestras. Ni pienses, solo reemplaza.

PARTE A — Enunciados

Problema 2.1 – Curva de carretera

Un automóvil toma una curva de radio $\rho = 150$ m con una rapidez de 20 m/s, y en ese instante está frenando a razón de $3,0$ m/s². Determine la magnitud de la aceleración total del automóvil y el ángulo que forma con la dirección del movimiento.



Problema 2.2 – El mismo problema 1.6, ahora en n-t

La partícula del Problema 1.6 recorre $y = \frac{x^2}{20}$ con $v_x = 3,0$ m/s constante. En $x = 10$ m determine:

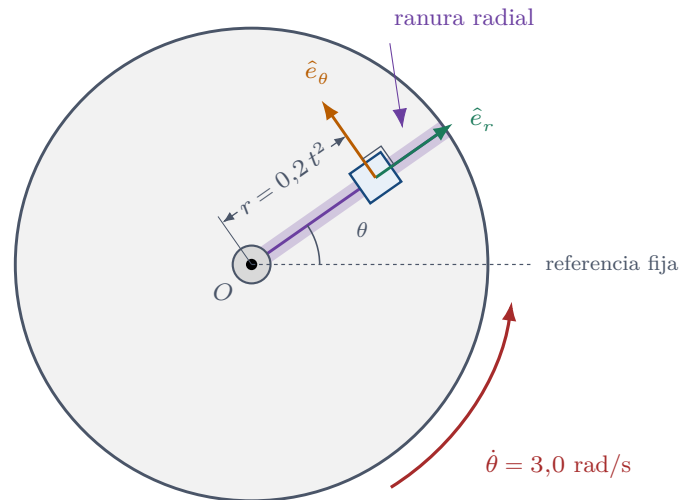
- El radio de curvatura ρ .
- Las componentes a_n y a_t .
- Verifique que $\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ coincide con el $|\vec{a}|$ que obtuvo en el Taller 1.

Problema 2.3 – Cuándo se alcanza cierta aceleración

Un auto parte del reposo sobre una pista circular de 200 m de radio y aumenta su rapidez a razón constante de $0,50$ m/s². Determine el instante en que la magnitud de su aceleración total llega a $1,5$ m/s², y la rapidez que lleva en ese momento.

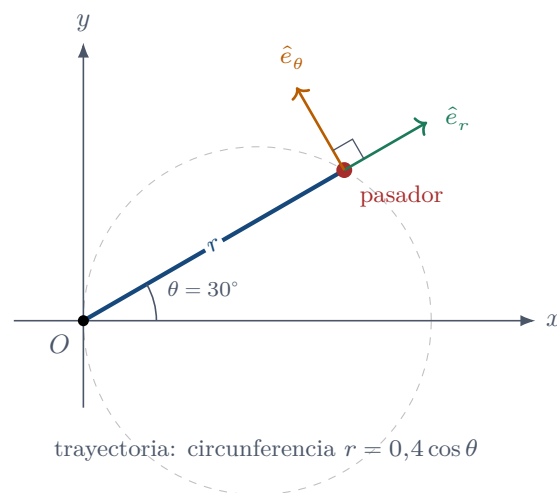
Problema 2.4 – Bloque en ranura de plataforma giratoria (tipo Parcial 2021-II)

Un bloque se desliza por la ranura radial de una plataforma según $r = 0,2t^2$ m, mientras la plataforma gira con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3,0$ rad/s. Para $t = 2,0$ s determine la velocidad y la aceleración absolutas del bloque (componentes y magnitudes).

**Problema 2.5 – Pin guiado por trayectoria circular (tipo Parcial 2022-II)**

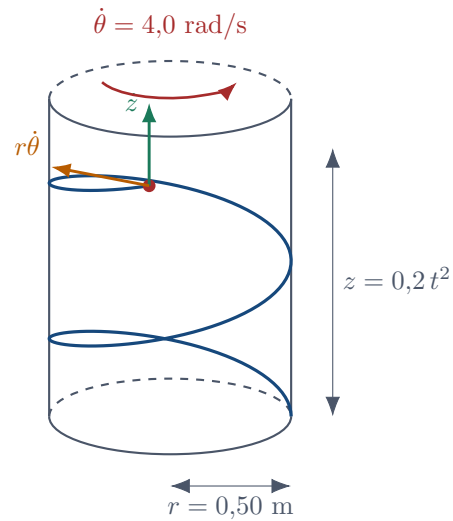
Un pasador se mueve siguiendo la trayectoria $r = 0,4 \cos \theta$ m, y el brazo que lo arrastra gira con $\dot{\theta} = 3,0$ rad/s constante. Para $\theta = 30^\circ$ determine:

- r , $\dot{r}$ y $\ddot{r}$.
- Las componentes y la magnitud de la velocidad.
- Las componentes y la magnitud de la aceleración.



Problema 2.6 – Coordenadas cilíndricas

Una partícula sube por la superficie de un cilindro de radio $r = 0,50$ m. Gira con $\dot{\theta} = 4,0$ rad/s constante y su altura varía según $z = 0,2t^2$ m. En $t = 1,0$ s determine la velocidad y la aceleración de la partícula.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 2.1

Ruta de solución

En $n-t$ solo hay dos componentes y ya te dieron una (a_t , el frenado). La otra sale de la fórmula $a_n = v^2/\rho$. Después es Pitágoras.

PASO 1 Componente normal

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20)^2}{150} = 2,667 \text{ m/s}^2$$

Apunta hacia el centro de la curva.

PASO 2 Componente tangencial

$$a_t = \dot{v} = -3,0 \text{ m/s}^2 \quad (\text{negativa porque está frenando})$$

PASO 3 Magnitud y dirección

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3,0)^2 + (2,667)^2} = \sqrt{9 + 7,111} = 4,01 \text{ m/s}^2$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{a_n}{|a_t|}\right) = \arctan\left(\frac{2,667}{3,0}\right) = 41,6^\circ$$

medido desde la dirección tangencial, hacia el centro de la curva.

Respuesta: $|\vec{a}| = 4,01 \text{ m/s}^2$, formando $41,6^\circ$ con la tangente (inclinada hacia adentro de la curva y hacia atrás, porque frena).

Chequeo de sentido común

Aunque el conductor sienta que “solo está frenando”, su aceleración real es mayor que la de frenado ($4,01 > 3,0$) porque la curva también lo acelera hacia adentro. Ese es exactamente el motivo por el que se derrapa frenando en curva.

Problema 2.2

Ruta de solución

Ya sabes $|\vec{v}|$ y $|\vec{a}|$ del Taller 1. Aquí solo repartes esa misma aceleración en dos direcciones distintas. La clave es calcular ρ con la fórmula del radio de curvatura.

PASO 1 Derivadas de la trayectoria *respecto a x* (no al tiempo)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{10} \Big|_{x=10} = 1 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{10} = 0,1$$

PASO 2 Radio de curvatura

$$\rho = \frac{[1 + (1)^2]^{3/2}}{0,1} = \frac{2^{3/2}}{0,1} = \frac{2,828}{0,1} = 28,28 \text{ m}$$

PASO 3 Rapidez y componente normal

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4,243 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{18}{28,28} = 0,636 \text{ m/s}^2$$

PASO 4 Componente tangencial

a_t es la rapidez con que cambia $|\vec{v}|$. Como $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ con v_x constante:

$$a_t = \dot{v} = \frac{v_y a_y}{v} = \frac{(3,0)(0,90)}{4,243} = 0,636 \text{ m/s}^2$$

PASO 5 Verificación

$$|\vec{a}| = \sqrt{0,636^2 + 0,636^2} = 0,900 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Coincide exactamente con el $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$ del Taller 1.

Respuesta: (a) $\rho = 28,3 \text{ m}$ (b) $a_n = a_t = 0,636 \text{ m/s}^2$ (c) $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$, igual que en $x-y$.

La moraleja

$x-y$ y $n-t$ son **dos idiomas para describir el mismo vector**. El vector aceleración es el mismo; solo cambia cómo lo partes. Por eso siempre puedes usar uno para chequear el otro.

Problema 2.3**Ruta de solución**

a_t es dato y constante, así que $v = 0,5t$. a_n crece con el tiempo porque v crece. Armas $|\vec{a}|$ en función de t , lo igualas a 1,5 y despejas.

PASO 1 Rapidez en función del tiempo

$$v = v_0 + a_t t = 0 + 0,5 t$$

PASO 2 Componente normal en función del tiempo

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0,5t)^2}{200} = 1,25 \times 10^{-3} t^2$$

PASO 3 Imponer la condición $|\vec{a}| = 1,5$

$$a_t^2 + a_n^2 = (1,5)^2 \Rightarrow 0,25 + (1,25 \times 10^{-3} t^2)^2 = 2,25$$

$$1,5625 \times 10^{-6} t^4 = 2,0 \Rightarrow t^4 = 1,28 \times 10^6 \Rightarrow t = 33,6 \text{ s}$$

PASO 4 Rapidez en ese instante

$$v = 0,5(33,64) = 16,8 \text{ m/s}$$

Respuesta: $t = 33,6 \text{ s}$, con $v = 16,8 \text{ m/s}$. (Verificación: $a_n = 16,8^2/200 = 1,414$; $\sqrt{0,5^2 + 1,414^2} = 1,50 \checkmark$)

Problema 2.4**Ruta de solución**

Problema de polares puro: te dan $r(t)$ directamente y $\dot{\theta}$. Derivas r dos veces respecto a t , anotas $\ddot{\theta} = 0$, y reemplazas en las fórmulas maestras. Nada más.

PASO 1 Sacar las cinco cantidades en $t = 2 \text{ s}$

$$\begin{aligned} r &= 0,2t^2 = 0,2(4) = 0,80 \text{ m} \\ \dot{r} &= 0,4t = 0,4(2) = 0,80 \text{ m/s} \\ \ddot{r} &= 0,40 \text{ m/s}^2 \\ \dot{\theta} &= 3,0 \text{ rad/s} \\ \ddot{\theta} &= 0 \quad (\text{"velocidad angular constante"}) \end{aligned}$$

PASO 2 Velocidad

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = 0,80 \text{ m/s} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = (0,80)(3,0) = 2,40 \text{ m/s} \\ \vec{v} &= 0,80 \hat{e}_r + 2,40 \hat{e}_\theta \text{ (m/s)}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{0,64 + 5,76} = 2,53 \text{ m/s} \end{aligned}$$

PASO 3 Aceleración

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0,40 - (0,80)(3,0)^2 = 0,40 - 7,20 = -6,80 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0,80)(3,0) = 4,80 \text{ m/s}^2 \\ \vec{a} &= -6,80 \hat{e}_r + 4,80 \hat{e}_\theta \text{ (m/s}^2\text{)}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{46,24 + 23,04} = 8,32 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 2,53 \text{ m/s}$ y $|\vec{a}| = 8,32 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

a_r salió **negativa** y muy grande: la aceleración apunta principalmente *hacia el centro*. Eso es correcto, porque el bloque está girando y todo lo que gira necesita aceleración centrípeta. Y los $4,80 \text{ m/s}^2$ de a_θ son **puro Coriolis** ($\ddot{\theta} = 0$): aparecieron solo porque el bloque se mueve hacia afuera mientras el disco gira.

Problema 2.5

Ruta de solución

Aquí r no viene en función de t sino de θ . Derivas con regla de la cadena: cada derivada temporal de algo con θ trae un $\dot{\theta}$. Como $\dot{\theta}$ es constante, $\ddot{\theta} = 0$ y todo se simplifica.

PASO 1 Derivar $r = 0,4 \cos \theta$ respecto al tiempo

$$r = 0,4 \cos \theta$$

$$\dot{r} = -0,4 \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = -0,4 (\cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin \theta \cdot \ddot{\theta}) = -0,4 \cos \theta \dot{\theta}^2 \quad (\text{pues } \ddot{\theta} = 0)$$

PASO 2 Evaluar en $\theta = 30^\circ$, $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$

$$r = 0,4(0,8660) = 0,3464 \text{ m}$$

$$\dot{r} = -0,4(0,5000)(3) = -0,600 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = -0,4(0,8660)(9) = -3,118 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo de $\dot{r}$ dice que el pasador se está *acercando* al origen.

PASO 3 Velocidad

$$v_r = -0,600 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = (0,3464)(3) = 1,039 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0,36 + 1,080} = 1,20 \text{ m/s}$$

PASO 4 Aceleración

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -3,118 - (0,3464)(9) = -3,118 - 3,118 = -6,235 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0,600)(3) = -3,600 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{38,88 + 12,96} = 7,20 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $r = 0,346 \text{ m}$, $\dot{r} = -0,600 \text{ m/s}$, $\ddot{r} = -3,118 \text{ m/s}^2$. (b) $|\vec{v}| = 1,20 \text{ m/s}$. (c) $|\vec{a}| = 7,20 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

La ecuación $r = 0,4 \cos \theta$ es una **circunferencia de diámetro 0,4 m** que pasa por el origen. El pasador recorre esa circunferencia, y se puede demostrar que lo hace con rapidez constante $v = D\dot{\theta} = 0,4(3) = 1,20 \text{ m/s}$. ¡Exactamente lo que dio! Y como la rapidez es constante, toda la aceleración es centrípeta: $a = v^2/R = 1,2^2/0,2 = 7,20 \text{ m/s}^2$. También coincide. Dos chequeos independientes.

Problema 2.6

Ruta de solución

Cilíndricas = polares + z . El movimiento vertical se resuelve aparte, como si fuera un problema de bachillerato, y se pega como tercera componente.

PASO 1 Recopilar datos en $t = 1$ s

$$r = 0,50 \text{ m}, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = 4,0 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$z = 0,2t^2 \Rightarrow \dot{z} = 0,4t = 0,40 \text{ m/s}, \quad \ddot{z} = 0,40 \text{ m/s}^2$$

PASO 2 Velocidad

$$\vec{v} = \underbrace{0}_{\dot{r}} \hat{e}_r + \underbrace{(0,5)(4)}_{r\dot{\theta}} \hat{e}_\theta + \underbrace{0,40}_{\dot{z}} \hat{e}_z = 2,0 \hat{e}_\theta + 0,40 \hat{e}_z \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4,0 + 0,16} = 2,04 \text{ m/s}$$

PASO 3 Aceleración

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (0,5)(16) = -8,0 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$a_z = \ddot{z} = 0,40 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{64 + 0 + 0,16} = 8,01 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 2,04 \text{ m/s}$ y $|\vec{a}| = 8,01 \text{ m/s}^2$ (casi toda centrípeta).

Hoja de respuestas rápida — Taller 2

2.1 $a_n = 2,667$; $|\vec{a}| = 4,01 \text{ m/s}^2$ a $41,6^\circ$. **2.2** $\rho = 28,28 \text{ m}$; $a_n = a_t = 0,636$; $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$. **2.3** $t = 33,6 \text{ s}$; $v = 16,8 \text{ m/s}$.

2.4 $\vec{v} = 0,8\hat{e}_r + 2,4\hat{e}_\theta$, $|v| = 2,53 \text{ m/s}$; $\vec{a} = -6,8\hat{e}_r + 4,8\hat{e}_\theta$, $|a| = 8,32 \text{ m/s}^2$.

2.5 $r = 0,346$; $\dot{r} = -0,600$; $\ddot{r} = -3,118$; $|v| = 1,20 \text{ m/s}$; $|a| = 7,20 \text{ m/s}^2$. **2.6** $|v| = 2,04 \text{ m/s}$; $|a| = 8,01 \text{ m/s}^2$.

TALLER 3

Movimiento vinculado (poleas y cables) y movimiento relativo con ejes en traslación

Semana del programa: Semana 2, Clase 2 y Semana 3, Clase 1 • Tiempo sugerido: 2,5 horas

1. Lo que necesitas de este tema

Movimiento dependiente: la cuerda no se estira

Toda la idea cabe en una frase: **la longitud total del cable es constante**. Entonces:

1. Escoge un **datum** (línea fija de referencia) para cada bloque.
2. Escribe la longitud del cable sumando todos los tramos: $L = (\text{algo}) s_A + (\text{algo}) s_B + \text{constantes}$.
3. Deriva respecto al tiempo: las constantes desaparecen y queda $0 = \alpha v_A + \beta v_B$.
4. Deriva otra vez: $0 = \alpha a_A + \beta a_B$.

El truco para no equivocarse con el signo

Cuenta **cuántos tramos de cable** sostienen a cada bloque. Si n tramos sostienen al bloque B , entonces $n s_B$ aparece en la ecuación de longitud, y ese bloque se mueve n **veces más lento** que el extremo libre del cable. Si un bloque se mueve hacia donde *aumenta* su s , su velocidad es positiva; el signo negativo que sale al final significa “se mueve hacia donde s disminuye”.

Movimiento relativo con ejes en traslación

El observador se monta sobre B (pero sin girar con él). Entonces:

$$\boxed{\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}} \quad \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}} \quad \boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}}$$

Se lee: “lo que hace A (visto desde el piso) = lo que hace B + lo que hace A visto desde B ”.

El orden de los subíndices

$\vec{v}_{A/B}$ es “la velocidad de A **respecto a** B ”. Se despeja así: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. **Siempre el primero menos el segundo**. Y $\vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$: mismo tamaño, sentido opuesto.

Cuando el “brazo” entre los dos cuerpos gira

Si A y B están unidos por un cable, una barra o una cuerda de remolque de longitud r que **gira**, entonces $\vec{\mathbf{v}}_{A/B}$ y $\vec{\mathbf{a}}_{A/B}$ se escriben en **polares** montadas en B :

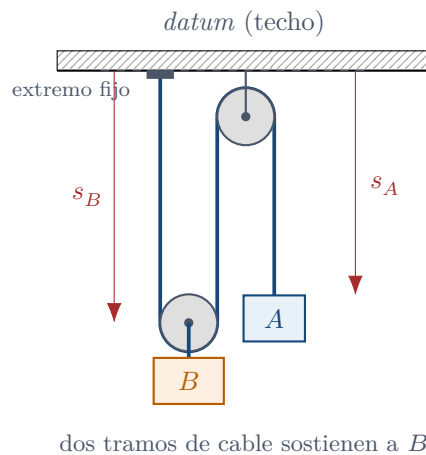
$$\vec{\mathbf{v}}_{A/B} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \vec{\mathbf{a}}_{A/B} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

Esta combinación (relativo + polares) es la que aparece en los parciales de avión–planeador y lancha–esquiador.

PARTE A — Enunciados

Problema 3.1 – Polea móvil

En el sistema de la figura, el bloque B cuelga de una polea móvil y el bloque A del extremo libre del cable. Si A desciende con una rapidez de $6,0 \text{ m/s}$ y una aceleración de $2,0 \text{ m/s}^2$ (ambas hacia abajo), determine la velocidad y la aceleración del bloque B .



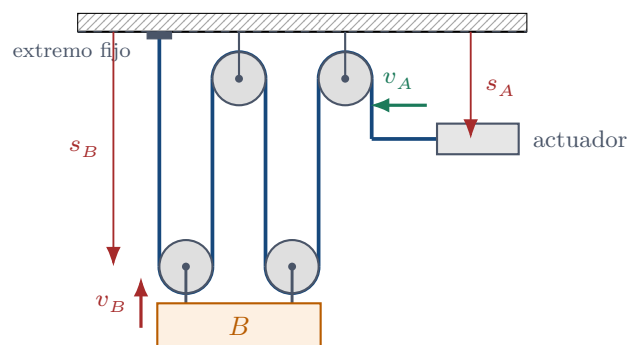
Problema 3.2 – Actuador con cuatro tramos (tipo Parcial 2020-II)

Un actuador hidráulico retrae un cable con rapidez $v_A = 1,2 \text{ m/s}$ y aceleración $a_A = 0,8 \text{ m/s}^2$. El bloque B está sostenido por **cuatro tramos** de cable, de modo que la restricción del sistema es

$$s_A + 4s_B = L$$

Determine:

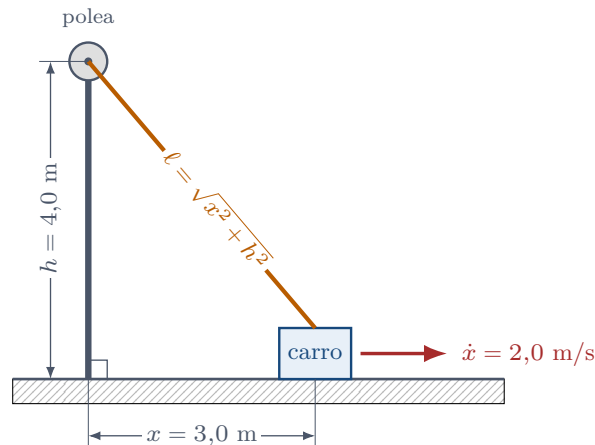
- La velocidad y la aceleración del bloque B .
- La velocidad del extremo del cable respecto al bloque B .



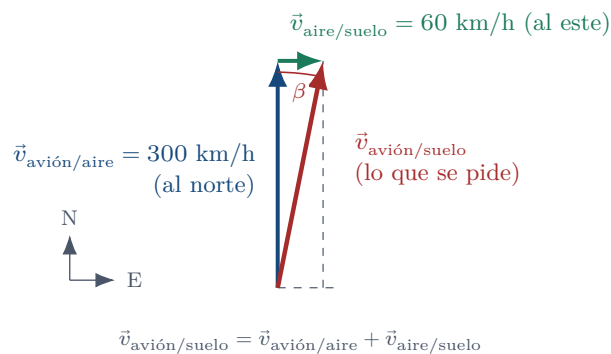
Problema 3.3 – Restricción no lineal (tipo Parcial 2022-II)

Un carro se aleja horizontalmente de la base de un poste con rapidez constante $\dot{x} = 2,0 \text{ m/s}$. Un cable va del carro hasta una polea en lo alto del poste, a $h = 4,0 \text{ m}$ de altura. En el instante en que $x = 3,0 \text{ m}$ determine:

- La rapidez con que se desenrolla el cable.
- La aceleración con que se desenrolla el cable.

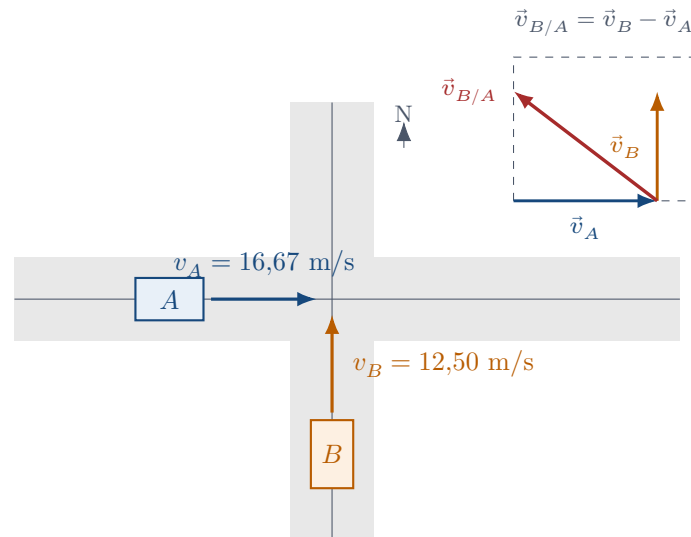
**Problema 3.4 – Avión con viento**

Un avión vuela con una velocidad de 300 km/h **respecto al aire**, apuntando hacia el norte. El viento sopla del oeste hacia el este a 60 km/h . Determine la velocidad del avión respecto al suelo (magnitud y dirección).



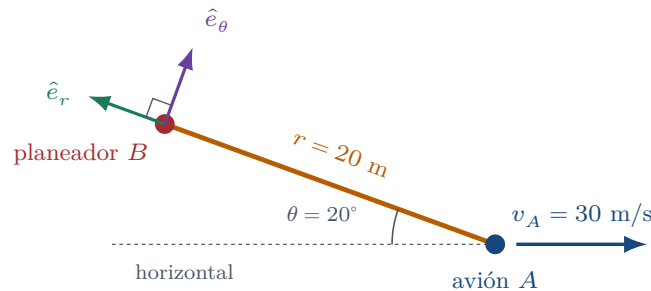
Problema 3.5 – Dos automóviles en un cruce

El automóvil A viaja hacia el este a 60 km/h y está acelerando a $1,2 \text{ m/s}^2$. El automóvil B viaja hacia el norte a 45 km/h y está frenando a $1,5 \text{ m/s}^2$. Determine la velocidad y la aceleración de B vistas desde A .



Problema 3.6 – Avión que remolca un planeador (tipo Parcial 2022-I)

Un avión A vuela horizontalmente con rapidez constante $v_A = 30 \text{ m/s}$ y remolca un planeador B mediante un cable de longitud constante $r = 20 \text{ m}$. El planeador gana altura de modo que el ángulo θ del cable con la horizontal aumenta a razón constante $\dot{\theta} = 0,10 \text{ rad/s}$. Para $\theta = 20^\circ$ determine la velocidad y la aceleración del planeador.



Nota: el avión vuela hacia la derecha y el planeador va atrás y arriba. $\hat{e}_r$ va del avión hacia el planeador; $\hat{e}_\theta$ apunta en el sentido en que crece θ .

PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 3.1

Ruta de solución

Escribe la longitud del cable en función de s_A y s_B medidos desde el techo, deriva dos veces, y reemplaza.

PASO 1 Ecuación de longitud del cable

Siguiendo el cable desde el anclaje: baja s_B hasta la polea móvil, sube s_B de vuelta, cruza la polea fija (tramo constante) y baja s_A :

$$L = s_B + s_B + s_A + \text{constantes} \Rightarrow 2s_B + s_A = L$$

PASO 2 Derivar una vez (velocidades)

$$2v_B + v_A = 0 \Rightarrow v_B = -\frac{v_A}{2}$$

Con $v_A = +6,0$ m/s (positivo porque A baja y s_A crece hacia abajo):

$$v_B = -3,0 \text{ m/s}$$

El signo menos significa que s_B *disminuye*: el bloque B **sube** a 3,0 m/s.

PASO 3 Derivar otra vez (aceleraciones)

$$2a_B + a_A = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{2,0}{2} = -1,0 \text{ m/s}^2$$

Es decir, B acelera hacia arriba a $1,0$ m/s².

Respuesta: $v_B = 3,0$ m/s **hacia arriba**; $a_B = 1,0$ m/s² **hacia arriba**.

Chequeo de sentido común

Dos tramos sostienen a B , así que B se mueve la **mitad** de rápido que A . Ese es el precio del sistema de poleas: ganas fuerza (la tensión sostiene el doble de peso) pero pierdes velocidad. Si te hubiera dado B más rápido que A , el razonamiento está invertido.

Problema 3.2

Ruta de solución

Aquí la restricción te la dan hecha. Derivar y reemplazar. La parte (b) es simplemente aplicar la definición de velocidad relativa.

PASO 1 Derivar la restricción

$$s_A + 4s_B = L \Rightarrow v_A + 4v_B = 0 \Rightarrow v_B = -\frac{v_A}{4}$$

$$a_A + 4a_B = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{a_A}{4}$$

PASO 2 Reemplazar

$$|v_B| = \frac{1,2}{4} = 0,30 \text{ m/s} \quad |a_B| = \frac{0,8}{4} = 0,20 \text{ m/s}^2$$

PASO 3 (b) Velocidad relativa del cable respecto a B

Tomando como positivo el sentido en que se mueve el cable:

$$v_{A/B} = v_A - v_B = 1,2 - (-0,30) = 1,50 \text{ m/s}$$

Respuesta: (a) $v_B = 0,30 \text{ m/s}$ y $a_B = 0,20 \text{ m/s}^2$, en sentido contrario al del cable. (b) $v_{A/B} = 1,50 \text{ m/s}$.

Problema 3.3**Ruta de solución**

La restricción no es una suma de tramos rectos: es un **teorema de Pitágoras**. Se escribe la longitud, se deriva respecto al tiempo (regla de la cadena), y se deriva otra vez. Es el problema que más asusta en el parcial y es puro cálculo.

PASO 1 Escribir la longitud del tramo inclinado

$$\ell = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + 16}$$

PASO 2 Derivar respecto al tiempo

$$\dot{\ell} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 16}} \cdot 2x \dot{x} = \frac{x \dot{x}}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x \dot{x}}{\ell}$$

En $x = 3 \text{ m}$: $\ell = \sqrt{9 + 16} = 5,0 \text{ m}$, y

$$\dot{\ell} = \frac{(3)(2)}{5} = 1,20 \text{ m/s}$$

PASO 3 Derivar otra vez

Derivando $\dot{\ell} = \frac{x \dot{x}}{\ell}$ como un cociente:

$$\ddot{\ell} = \frac{(\dot{x}^2 + x \ddot{x}) \ell - (x \dot{x}) \dot{\ell}}{\ell^2} = \frac{\dot{x}^2 + x \ddot{x}}{\ell} - \frac{(x \dot{x})^2}{\ell^3}$$

Con $\ddot{x} = 0$ (rapidez constante):

$$\ddot{\ell} = \frac{(2)^2}{5} - \frac{(3 \cdot 2)^2}{125} = 0,80 - 0,288 = 0,512 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) El cable se desenrolla a $1,20 \text{ m/s}$. (b) Con una aceleración de $0,512 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

$\dot{\ell} = 1,20 \text{ m/s}$ es **menor** que $\dot{x} = 2,0 \text{ m/s}$. Tiene que ser así: el carro se aleja en diagonal respecto al cable, y solo la *componente a lo largo del cable* estira la cuerda. De hecho $\dot{\ell} = \dot{x} \cos \alpha$, donde α es el ángulo entre el cable y el piso: $\cos \alpha = 3/5 = 0,6$, y $2(0,6) = 1,2 \checkmark$. Ese atajo sirve para verificar siempre.

Truco

Nota que aunque el carro va a **velocidad constante**, el cable sí tiene aceleración. La aceleración aparece porque la *geometría* cambia, no porque el carro acelere. Ese es el corazón de todos los problemas de mecanismos.

Problema 3.4**PASO 1** Plantear la ecuación de velocidades

$$\vec{v}_{\text{avión/suelo}} = \vec{v}_{\text{aire/suelo}} + \vec{v}_{\text{avión/aire}}$$

Tomando $\hat{i}$ hacia el este y $\hat{j}$ hacia el norte:

$$\vec{v} = \underbrace{60}_{\text{viento}} \hat{i} + \underbrace{300}_{\text{avión respecto al aire}} \hat{j} = 60 \hat{i} + 300 \hat{j} \text{ (km/h)}$$

PASO 2 Magnitud y dirección

$$|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 300^2} = 305,9 \text{ km/h}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{60}{300}\right) = 11,3^\circ \text{ al este del norte}$$

Respuesta: 305,9 km/h, desviado 11,3° hacia el este respecto al norte.

Chequeo de sentido común

El avión apuntaba al norte pero termina yendo hacia el nor-noreste: lo arrastró el viento. Por eso los pilotos corrigen el rumbo. Si alguna vez te da que el avión termina yendo exactamente al norte con viento lateral, revisa la suma vectorial.

Problema 3.5**PASO 1** Convertir unidades y escribir los vectores

$$v_A = \frac{60}{3,6} = 16,667 \text{ m/s (este)} \quad v_B = \frac{45}{3,6} = 12,50 \text{ m/s (norte)}$$

$$\vec{v}_A = 16,667 \hat{i}, \quad \vec{v}_B = 12,50 \hat{j}$$

$$\vec{a}_A = 1,2 \hat{i} \text{ (acelera hacia el este)}, \quad \vec{a}_B = -1,5 \hat{j} \text{ (frena yendo al norte)}$$

PASO 2 Velocidad relativa

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -16,667 \hat{i} + 12,50 \hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}_{B/A}| = \sqrt{277,8 + 156,3} = 20,83 \text{ m/s}$$

$$\text{dirección: } \arctan\left(\frac{12,50}{16,667}\right) = 36,9^\circ \text{ al norte del oeste}$$

PASO 3 Aceleración relativa

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -1,2\hat{i} - 1,5\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}_{B/A}| = \sqrt{1,44 + 2,25} = 1,92 \text{ m/s}^2 \quad \text{dirigida al suroeste}$$

Respuesta: $\vec{v}_{B/A} = (-16,67\hat{i} + 12,50\hat{j}) \text{ m/s}$, $|\vec{v}_{B/A}| = 20,8 \text{ m/s}$. $\vec{a}_{B/A} = (-1,2\hat{i} - 1,5\hat{j}) \text{ m/s}^2$, $|\vec{a}_{B/A}| = 1,92 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

Para el conductor de A , el auto B parece venir hacia atrás y hacia la izquierda, aunque B en realidad va derecho al norte. Eso es exactamente lo que uno percibe en un cruce: el otro carro “se mueve raro” porque uno mismo se está moviendo.

Problema 3.6

Ruta de solución

Este es el problema mixto: **relativo** + **polares**. El planeador = avión + lo que el planeador hace visto desde el avión, y eso último es un movimiento circular de radio r (el cable no se estira).

PASO 1 Datos y vectores unitarios

$$r = 20 \text{ m}, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = 0,10 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\theta} = 0, \quad \theta = 20^\circ$$

Con $\hat{i}$ en el sentido de vuelo del avión (hacia la derecha) y $\hat{j}$ hacia arriba, el planeador está *atrás y arriba*:

$$\hat{e}_r = -\cos 20^\circ \hat{i} + \sin 20^\circ \hat{j}, \quad \hat{e}_\theta = \sin 20^\circ \hat{i} + \cos 20^\circ \hat{j}$$

PASO 2 Velocidad relativa del planeador respecto al avión

Como $\dot{r} = 0$, solo queda la componente $\hat{e}_\theta$:

$$|\vec{v}_{B/A}| = r\dot{\theta} = (20)(0,10) = 2,0 \text{ m/s}$$

Descomponiendo esa velocidad (perpendicular al cable, en el sentido en que θ crece):

$$\vec{v}_{B/A} = 2,0 \sin 20^\circ \hat{i} + 2,0 \cos 20^\circ \hat{j} = (0,684\hat{i} + 1,879\hat{j}) \text{ m/s}$$

PASO 3 Velocidad absoluta del planeador

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = 30\hat{i} + (0,684\hat{i} + 1,879\hat{j}) = 30,684\hat{i} + 1,879\hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{941,5 + 3,53} = 30,74 \text{ m/s}, \quad \text{a } 3,51^\circ \text{ sobre la horizontal}$$

PASO 4 Aceleración relativa

Con $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$, de la fórmula polar solo sobrevive el término centrípeta:

$$\vec{a}_{B/A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r = -(20)(0,10)^2 \hat{e}_r = -0,20 \hat{e}_r$$

Como $\hat{e}_r$ va del avión al planeador, el signo menos indica que la aceleración va **del planeador hacia el avión**: es puramente centrípeta.

PASO 5 Aceleración absoluta

Como $\vec{a}_A = 0$ (el avión va a rapidez constante en línea recta):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} \Rightarrow |\vec{a}_B| = 0,20 \text{ m/s}^2 \text{ apuntando hacia el avión}$$

En componentes: $\vec{a}_B = -0,20 \hat{e}_r = (0,188 \hat{i} - 0,068 \hat{j}) \text{ m/s}^2$.

Respuesta: $|\vec{v}_B| = 30,74 \text{ m/s}$ a $3,51^\circ$ sobre la horizontal. $|\vec{a}_B| = 0,20 \text{ m/s}^2$ dirigida a lo largo del cable, hacia el avión.

Chequeo de sentido común

La aceleración del planeador apunta **a lo largo del cable hacia el avión**. Eso tiene sentido físico: visto desde el avión, el planeador da vueltas en un círculo de 20 m, y todo movimiento circular a rapidez angular constante tiene aceleración puramente centrípeta. Si te da una componente perpendicular al cable, es que colaste un $\ddot{\theta}$ o un $\dot{r}$ que no existe.

Hoja de respuestas rápida — Taller 3

3.1 $2s_B + s_A = L$; $v_B = 3,0 \text{ m/s} \uparrow$; $a_B = 1,0 \text{ m/s}^2 \uparrow$. **3.2** $v_B = 0,30 \text{ m/s}$; $a_B = 0,20 \text{ m/s}^2$; $v_{A/B} = 1,50 \text{ m/s}$.

3.3 $\ell = 5,0 \text{ m}$; $\dot{\ell} = 1,20 \text{ m/s}$; $\ddot{\ell} = 0,512 \text{ m/s}^2$. **3.4** $305,9 \text{ km/h}$ a $11,3^\circ$ al este del norte.

3.5 $\vec{v}_{B/A} = (-16,67; 12,50) \text{ m/s}$, $20,8 \text{ m/s}$; $\vec{a}_{B/A} = (-1,2; -1,5) \text{ m/s}^2$, $1,92 \text{ m/s}^2$.

3.6 $|\vec{v}_B| = 30,74 \text{ m/s}$ a $3,51^\circ$; $|\vec{a}_B| = 0,20 \text{ m/s}^2$ hacia el avión.

TALLER 4

Cuerpo rígido: rotación, velocidad y aceleración relativas, centro instantáneo

Semana del programa: Semana 3, Clase 2 y Semana 4 • Tiempo sugerido: 3 horas

1. Lo que necesitas de este tema

El cambio de mentalidad

Hasta ahora una partícula era un punto. Ahora el cuerpo tiene **tamaño**, así que sus puntos se mueven distinto entre sí. Pero como el cuerpo es rígido, la **distancia entre dos puntos nunca cambia**, y de ahí sale todo:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

En movimiento plano $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ y $\vec{\alpha} = \alpha \hat{k}$, así que:

$$\omega \hat{k} \times (x \hat{i} + y \hat{j}) = \omega(-y \hat{i} + x \hat{j})$$

Cómo leer la ecuación

$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_A}_{\text{traslación}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}}_{\text{rotación alrededor de A}}$. Todo movimiento plano es “arrastre + giro”. El término

$\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ siempre es **perpendicular** a la línea AB y vale $\omega \cdot |AB|$.

En la aceleración pasa lo mismo, pero el giro aporta **dos** pedazos: uno tangencial ($\alpha \times \vec{r}$, perpendicular a AB) y uno normal ($-\omega^2 \vec{r}$, que siempre apunta **de B hacia A**).

Rotación alrededor de un eje fijo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad \alpha d\theta = \omega d\omega$$

Para un punto a distancia r del eje:

$$v = \omega r, \quad a_t = \alpha r, \quad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Es la misma escalera del Taller 1, pero con letras griegas. Si α es constante valen $\omega = \omega_0 + \alpha t$ y $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$.

Centro instantáneo de rotación (CIR)

En cada instante existe un punto (que puede estar fuera del cuerpo) con velocidad **cero**. Si lo encuentras, el cuerpo se comporta como si solo girara alrededor de él:

$$v_P = \omega \cdot d_{P-\text{CIR}} \quad \text{para cualquier punto } P$$

Cómo hallarlo: traza una **perpendicular a la velocidad** de dos puntos distintos. Donde se cruzan está el CIR.

El CIR solo sirve para velocidades

Es un atajo excelente para velocidades y una **trampa mortal** para aceleraciones: el punto que es CIR ahora no lo será dentro de un instante, así que su aceleración *no* es cero. Para aceleraciones usa siempre la ecuación de aceleración relativa.

Receta de 4 pasos para cualquier mecanismo

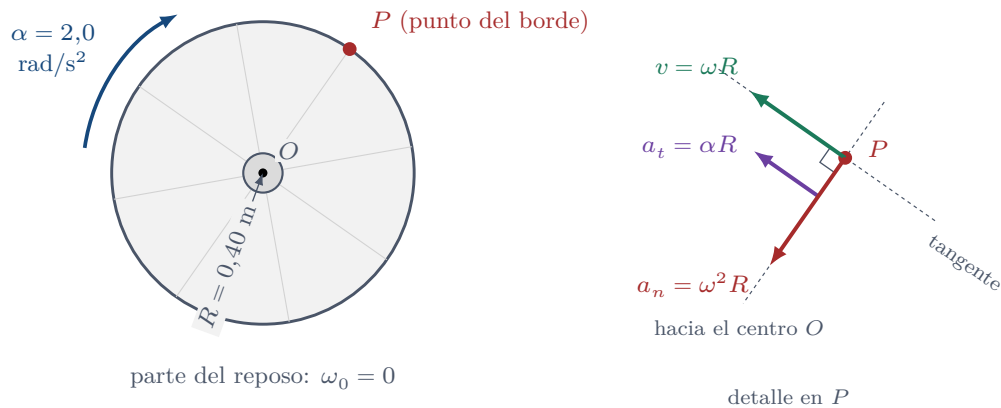
1. **Dibuja** el mecanismo a escala y ubica los puntos con coordenadas (x, y) .
2. **Identifica qué sabes:** en un pasador fijo $\vec{v} = 0$; en un collarín la velocidad va *a lo largo* de la guía; en una barra con rotador conocido $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
3. **Escribe** $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ y separa en componentes $\hat{i}$ y $\hat{j}$: quedan **dos ecuaciones y dos incógnitas**.
4. **Repite** con la ecuación de aceleración, usando el ω que acabas de hallar.

PARTE A — Enunciados

Problema 4.1 – Rotación alrededor de un eje fijo

Una polea de 0,40 m de radio parte del reposo y acelera angularmente a razón constante $\alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$. Para $t = 3,0 \text{ s}$ determine:

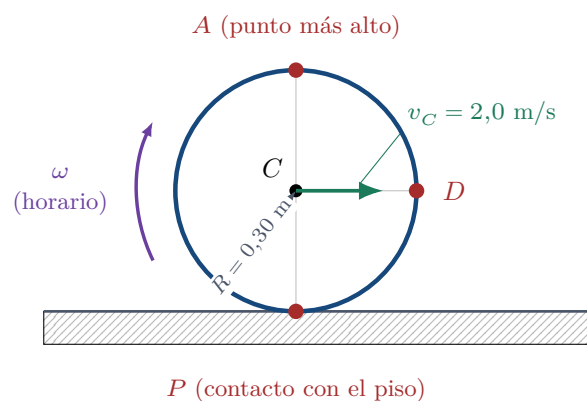
- La velocidad angular y el ángulo girado.
- La velocidad, la aceleración tangencial, la aceleración normal y la aceleración total de un punto del borde.



Problema 4.2 – Rueda que rueda sin deslizar

Una rueda de radio $R = 0,30 \text{ m}$ rueda sin deslizar sobre el piso; su centro C avanza a $2,0 \text{ m/s}$ hacia la derecha. Determine:

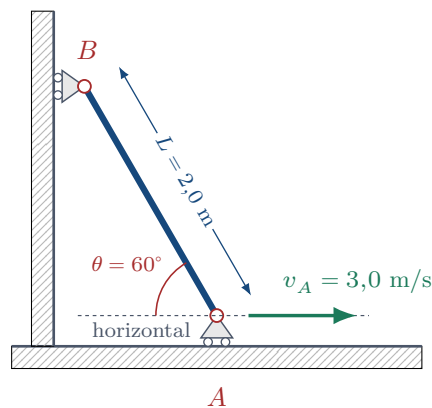
- La velocidad angular de la rueda.
- La velocidad del punto más alto A y del punto de contacto P .
- La velocidad del punto D situado al mismo nivel del centro, en el lado derecho.



Problema 4.3 – Barra apoyada en pared y piso

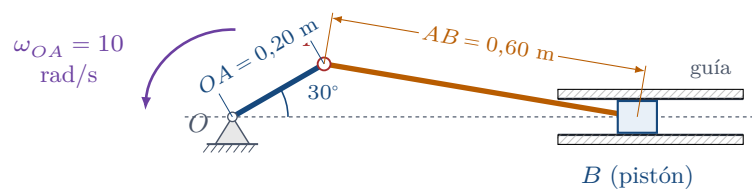
Una barra AB de 2,0 m de longitud tiene el extremo A sobre el piso y el extremo B contra la pared. En el instante mostrado la barra forma 60° con la horizontal y el extremo A se aleja de la pared con rapidez constante $v_A = 3,0$ m/s. Determine:

- La velocidad angular de la barra y la velocidad de B .
- La posición del centro instantáneo de rotación, y verifique con él los resultados de (a).
- La aceleración angular de la barra y la aceleración de B .

**Problema 4.4 – Mecanismo biela-manivela (velocidades y aceleraciones)**

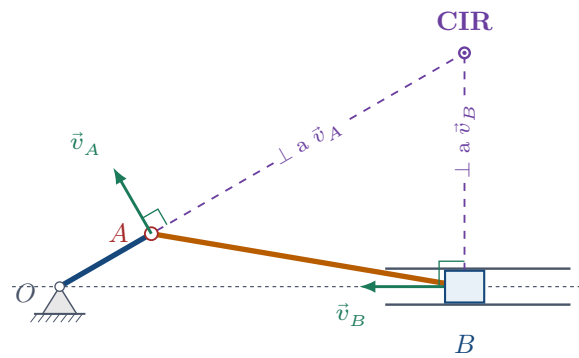
La manivela OA mide 0,20 m y gira en sentido **antihorario** con velocidad angular constante $\omega_{OA} = 10$ rad/s. La biela AB mide 0,60 m y el pistón B se desliza sobre la línea horizontal que pasa por O . Para el instante en que la manivela forma 30° con la horizontal determine:

- La velocidad angular de la biela AB y la velocidad del pistón.
- La aceleración angular de la biela y la aceleración del pistón.



Problema 4.5 – El mismo mecanismo, ahora con el CIR

Para el mecanismo del Problema 4.4, halle la posición del centro instantáneo de rotación de la biela AB y úselo para calcular de nuevo ω_{AB} y v_B . Compare con lo obtenido en 4.4.



El CIR es donde se cortan las dos perpendiculares. La $\perp$ a $\vec{v}_A$ es la prolongación de OA ; la $\perp$ a $\vec{v}_B$ es la vertical por B . En el CIR la biela AB tiene velocidad cero en ese instante.

PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 4.1

PASO 1 Cinemática angular con α constante

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 2,0(3,0) = 6,0 \text{ rad/s}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(2,0)(9) = 9,0 \text{ rad} = 1,43 \text{ vueltas}$$

PASO 2 Llevar el giro al borde

$$v = \omega R = (6,0)(0,40) = 2,40 \text{ m/s}$$

$$a_t = \alpha R = (2,0)(0,40) = 0,80 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \omega^2 R = (36)(0,40) = 14,4 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0,80^2 + 14,4^2} = 14,42 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$, $\theta = 9,0 \text{ rad}$. (b) $v = 2,40 \text{ m/s}$; $a_t = 0,80$; $a_n = 14,4$; $|\vec{a}| = 14,42 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

a_n es 18 veces mayor que a_t . Es lo normal: apenas el cuerpo toma algo de velocidad angular, la componente centrípeta ($\propto \omega^2$) domina por completo. Por eso las piezas que giran rápido fallan por fuerza centrífuga y no por el arranque.

Problema 4.2

Ruta de solución

“Rodar sin deslizar” significa exactamente una cosa: **el punto de contacto tiene velocidad cero**. O sea, el punto de contacto *es* el CIR. Con eso todo sale con una multiplicación.

PASO 1 Velocidad angular a partir de la condición de rodadura

El CIR es P , y el centro C está a $R = 0,30 \text{ m}$ de él:

$$v_C = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{2,0}{0,30} = 6,67 \text{ rad/s} \quad (\text{horario})$$

PASO 2 Velocidad de A y de P

$$v_A = \omega \cdot d_{A-P} = 6,67(0,60) = 4,0 \text{ m/s} \quad (\text{hacia la derecha})$$

$$v_P = \omega \cdot 0 = 0$$

PASO 3 Velocidad de D

$$d_{D-P} = \sqrt{0,30^2 + 0,30^2} = 0,4243 \text{ m}$$

$v_D = 6,67(0,4243) = 2,83 \text{ m/s}$ perpendicular a PD , es decir a 45° hacia arriba y a la derecha

Respuesta: (a) $\omega = 6,67 \text{ rad/s}$ horario. (b) $v_A = 4,0 \text{ m/s}$, $v_P = 0$. (c) $v_D = 2,83 \text{ m/s}$ a 45° .

Chequeo de sentido común

El punto más alto va al **doble** de la velocidad del centro y el de contacto está quieto. Por eso en una foto de una bicicleta en movimiento la parte de arriba de la rueda sale borrosa y la de abajo sale nítida. Ese es literalmente el chequeo visual del CIR.

Problema 4.3

PASO 1 Ubicar los puntos

$$A = (2 \cos 60^\circ, 0) = (1,0; 0) \text{ m} \quad B = (0, 2 \sin 60^\circ) = (0; 1,732) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = B - A = (-1,0; 1,732) \text{ m}$$

PASO 2 Ecuación de velocidad relativa

A solo puede moverse horizontal ($\vec{v}_A = 3,0\hat{i}$) y B solo vertical ($\vec{v}_B = v_B\hat{j}$):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \hat{k} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$v_B \hat{j} = 3,0\hat{i} + \omega(-1,732\hat{i} - 1,0\hat{j})$$

PASO 3 Separar en componentes

$$\hat{i}: 0 = 3,0 - 1,732\omega \Rightarrow \omega = 1,732 \text{ rad/s}$$

$$\hat{j}: v_B = -1,0(1,732) = -1,732 \text{ m/s}$$

El signo menos dice que B **baja** por la pared, como era de esperarse.

PASO 4 (b) Centro instantáneo de rotación

$\vec{v}_A$ es horizontal $\Rightarrow$ su perpendicular es la vertical $x = 1,0$.

$\vec{v}_B$ es vertical $\Rightarrow$ su perpendicular es la horizontal $y = 1,732$.

Se cruzan en:

$$\text{CIR} = (1,0; 1,732) \text{ m}$$

Verificación:

$$d_A = 1,732 \text{ m} \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{d_A} = \frac{3,0}{1,732} = 1,732 \text{ rad/s} \checkmark$$

$$d_B = 1,0 \text{ m} \Rightarrow v_B = \omega d_B = 1,732 \text{ m/s} \checkmark$$

PASO 5 (c) Aceleraciones

Como v_A es constante, $\vec{a}_A = 0$. Y B solo acelera verticalmente:

$$a_B \hat{j} = 0 + \alpha \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

$$a_B \hat{j} = \alpha(-1,732\hat{i} - 1,0\hat{j}) - 3,0(-1,0\hat{i} + 1,732\hat{j})$$

$$\hat{i}: 0 = -1,732\alpha + 3,0 \Rightarrow \alpha = 1,732 \text{ rad/s}^2$$

$$\hat{j}: a_B = -1,0(1,732) - 3,0(1,732) = -1,732 - 5,196 = -6,93 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\omega = 1,73 \text{ rad/s}$; $v_B = 1,73 \text{ m/s}$ hacia abajo. (b) CIR en $(1,0; 1,73) \text{ m}$. (c) $\alpha = 1,73 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 6,93 \text{ m/s}^2$ hacia abajo.

Chequeo de sentido común

B tiene aceleración aunque A no la tenga. Eso no es un error: la barra está *girando*, y girar a velocidad angular constante ya produce aceleración normal. Además el CIR $(1; 1,73)$ está justo en la esquina del rectángulo que forman la pared, el piso y la barra: eso siempre pasa en este problema y sirve de chequeo instantáneo.

Problema 4.4

Ruta de solución

Dos cuerpos: la manivela (que ya sabes todo de ella) y la biela (que tiene ω_{AB} y α_{AB} desconocidos). El punto A es la bisagra que los conecta: pertenece a los dos. Así que primero sacas $\vec{v}_A$ de la manivela y después lo metes en la ecuación de la biela.

PASO 1 Geometría: ubicar A y B

$$A = 0,20(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = (0,1732; 0,1000) \text{ m}$$

B está sobre el eje x y a $0,60 \text{ m}$ de A :

$$(x_B - 0,1732)^2 + (0,1)^2 = 0,36 \Rightarrow x_B = 0,1732 + \sqrt{0,35} = 0,7648 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (0,5916; -0,1000) \text{ m}$$

PASO 2 Velocidad de A (viene de la manivela)

$$\vec{v}_A = \omega_{OA} \hat{k} \times \vec{r}_{A/O} = 10 \hat{k} \times (0,1732 \hat{i} + 0,1 \hat{j}) = -1,000 \hat{i} + 1,732 \hat{j} \text{ (m/s)}$$

(magnitud = $0,2 \times 10 = 2,0 \text{ m/s}$, perpendicular a OA ✓)

PASO 3 Ecuación de velocidad de la biela

B solo se mueve horizontalmente: $\vec{v}_B = v_B \hat{i}$.

$$v_B \hat{i} = (-1,000 \hat{i} + 1,732 \hat{j}) + \omega_{AB} \hat{k} \times (0,5916 \hat{i} - 0,1000 \hat{j})$$

$$v_B \hat{i} = (-1,000 \hat{i} + 1,732 \hat{j}) + \omega_{AB}(0,1000 \hat{i} + 0,5916 \hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = 1,732 + 0,5916 \omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = -2,928 \text{ rad/s (horaria)}$$

$$\hat{i}: v_B = -1,000 + 0,1000(-2,928) = -1,293 \text{ m/s}$$

PASO 4 Aceleración de A

Como ω_{OA} es constante, $\alpha_{OA} = 0$ y solo queda la componente normal:

$$\vec{a}_A = -\omega_{OA}^2 \vec{r}_{A/O} = -100(0,1732 \hat{i} + 0,1 \hat{j}) = -17,32 \hat{i} - 10,00 \hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

PASO 5 Ecuación de aceleración de la biela

$$a_B \hat{i} = \vec{a}_A + \alpha_{AB} \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$$

Con $\omega_{AB}^2 = 8,573$:

$$a_B \hat{i} = (-17,32 \hat{i} - 10,00 \hat{j}) + \alpha_{AB}(0,1000 \hat{i} + 0,5916 \hat{j}) - 8,573(0,5916 \hat{i} - 0,1000 \hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = -10,00 + 0,5916 \alpha_{AB} + 0,8573 \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{9,143}{0,5916} = 15,45 \text{ rad/s}^2$$

$$\hat{i}: a_B = -17,32 + 0,1000(15,45) - 5,071 = -20,85 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\omega_{AB} = 2,93 \text{ rad/s}$ horaria; $v_B = 1,293 \text{ m/s}$ hacia la **izquierda**. (b) $\alpha_{AB} = 15,45 \text{ rad/s}^2$ antihoraria; $a_B = 20,85 \text{ m/s}^2$ hacia la izquierda.

Cuidado

Fíjate en el orden: la componente $\hat{j}$ dio la incógnita angular y la $\hat{i}$ dio la lineal. **Siempre resuelve primero la ecuación donde solo hay una incógnita.** Si intentas resolver las dos a la vez te vas a enredar.

Problema 4.5

PASO 1 Trazar las dos perpendiculares

$\vec{v}_A$ es perpendicular a $OA \Rightarrow$ la perpendicular a $\vec{v}_A$ es la **línea OA prolongada**.

$\vec{v}_B$ es horizontal $\Rightarrow$ la perpendicular a $\vec{v}_B$ es la **vertical que pasa por B** , o sea $x = 0,7648$.

PASO 2 Intersección

La recta OA tiene pendiente $\tan 30^\circ = 0,5774$. En $x = 0,7648$:

$$y = 0,5774(0,7648) = 0,4416$$

$$\text{CIR} = (0,7648; 0,4416) \text{ m}$$

PASO 3 Distancias y comprobación

$$d_A = \sqrt{(0,7648 - 0,1732)^2 + (0,4416 - 0,1)^2} = \sqrt{0,5916^2 + 0,3416^2} = 0,6831 \text{ m}$$

$$d_B = 0,4416 \text{ m}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{d_A} = \frac{2,00}{0,6831} = 2,928 \text{ rad/s} \checkmark$$

$$v_B = \omega_{AB} d_B = 2,928(0,4416) = 1,293 \text{ m/s} \checkmark$$

Respuesta: CIR en $(0,765; 0,442) \text{ m}$; $\omega_{AB} = 2,93 \text{ rad/s}$ y $v_B = 1,293 \text{ m/s}$, idénticos a los del Problema 4.4.

Cuándo conviene el CIR

Si el problema **solo** pide velocidades, el CIR es mucho más rápido (dos distancias y una división, sin vectores). Si pide aceleraciones, olvídate del CIR y ve directo a la ecuación vectorial. En el parcial, usar el CIR como *verificación* de tu respuesta de velocidad te cuesta un minuto y te salva de un error de signo.

Hoja de respuestas rápida — Taller 4

4.1 $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$; $\theta = 9,0 \text{ rad}$; $v = 2,40 \text{ m/s}$; $a_t = 0,80$; $a_n = 14,4$; $|a| = 14,42 \text{ m/s}^2$.

4.2 $\omega = 6,67 \text{ rad/s}$; $v_A = 4,0 \text{ m/s}$; $v_P = 0$; $v_D = 2,83 \text{ m/s}$ a 45° .

4.3 $\omega = 1,732 \text{ rad/s}$; $v_B = 1,732 \text{ m/s}$ ↓; CIR $(1,0; 1,732)$; $\alpha = 1,732 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 6,93 \text{ m/s}^2$ ↓.

4.4 $\omega_{AB} = 2,928 \text{ rad/s}$ (horaria); $v_B = 1,293 \text{ m/s}$ ←; $\alpha_{AB} = 15,45 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 20,85 \text{ m/s}^2$ ←.

4.5 CIR $(0,7648; 0,4416) \text{ m}$; mismos ω_{AB} y v_B .

TALLER 5

Uniones deslizantes: ejes móviles en rotación y aceleración de Coriolis

Semana del programa: Semana 5, Clase 1 (el último tema del Parcial 1) • **Tiempo sugerido:** 3 horas

Este es el tema que decide el parcial

En los parciales de 2020-II, 2021-II, 2022-I, 2022-II y 2024-II el **primer punto** fue exactamente esto: un pasador que se desliza dentro de una ranura, o un cilindro hidráulico que se estira mientras pivota. Si dominas este taller, dominas el punto que más pesa.

1. Lo que necesitas de este tema

Cuándo se usa un eje rotatorio

Cuando dos piezas están unidas por un **pasador que desliza en una ranura** (o un collarín que corre sobre una barra), los dos cuerpos comparten un punto *pero ese punto se mueve respecto a uno de ellos*. Ahí ya no sirve $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$: hay que montarse en el cuerpo que gira.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/O} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/O} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/O}) + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}}_{\text{Coriolis}} + \vec{a}_{rel}$$

donde $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del **marco que gira** (la ranura o la barra), y $\vec{v}_{rel}$, $\vec{a}_{rel}$ son la velocidad y la aceleración del pasador **vistas por alguien montado en la ranura** (siempre a lo largo de la ranura).

La versión en polares es la misma fórmula

Si pones el origen en el pivote y $\hat{e}_r$ a lo largo de la ranura, $\vec{v}_{rel} = \dot{r}\hat{e}_r$, $\vec{a}_{rel} = \ddot{r}\hat{e}_r$, $\Omega = \dot{\theta}$, $\alpha = \ddot{\theta}$, y la fórmula gigante se convierte en:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Es exactamente la fórmula polar del Taller 2. No es un tema nuevo: es el mismo, aplicado a mecanismos. Por eso muchos profesores resuelven estos parciales “en polares”.

Qué es físicamente el término de Coriolis

$2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}$ aparece **solo** si se cumplen *las dos* condiciones a la vez:

1. el marco está girando ($\Omega \neq 0$), **y**
2. el objeto se mueve respecto al marco ($v_{rel} \neq 0$).

Si caminas hacia el borde de un carrusel que gira, tu velocidad tangencial (Ωr) tiene que *aumentar* porque r crece. Ese aumento forzado es la aceleración de Coriolis. Es perpendicular a $\vec{v}_{rel}$, y suele ser el término **más grande de todos**.

Procedimiento de 6 pasos

1. Identifica **quién gira** (la ranura/barra: ese es el marco) y **quién desliza** (el pasador).
2. Pon el origen en el pivote del marco. Mide r y θ .
3. Escribe qué sabes del pasador *en el marco fijo*: si viene de otra manivela, $\vec{v}_P = \vec{\omega}_{man} \times \vec{r}_{P/pivote}$ y $\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$.
4. Proyecta $\vec{v}_P$ sobre $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$: la componente $\hat{e}_r$ es $\dot{r}$, la $\hat{e}_\theta$ es $r\dot{\theta}$. **Ahí salen $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$** .
5. Proyecta $\vec{a}_P$ sobre $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ e iguala a $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ y $(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$. **Ahí salen $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$** .
6. Interpreta: $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son la velocidad y aceleración angular *del brazo ranurado*; $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ son la velocidad y aceleración *de deslizamiento*.

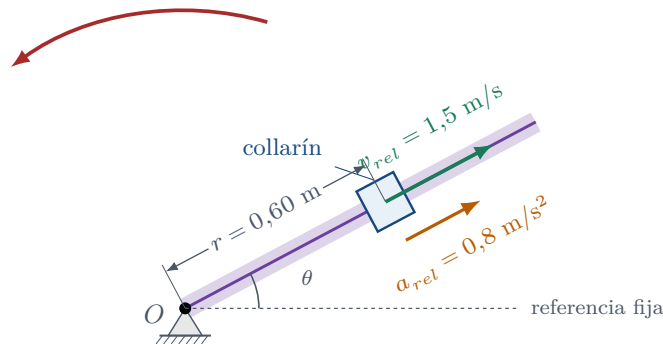
PARTE A — Enunciados

Problema 5.1 – Collarín sobre barra que gira (calentamiento)

Una barra gira en el plano horizontal alrededor de O con $\Omega = 4,0 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$, ambas antihorarias. Un collarín se desliza a lo largo de la barra alejándose de O con velocidad relativa $1,5 \text{ m/s}$ y aceleración relativa $0,8 \text{ m/s}^2$. En el instante en que el collarín está a $r = 0,60 \text{ m}$ de O , determine la velocidad y la aceleración absolutas del collarín, e indique cuánto vale el término de Coriolis.

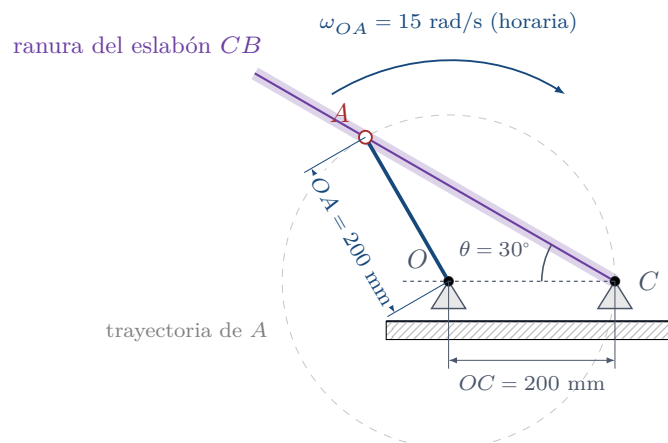
$$\Omega = 4,0 \text{ rad/s}, \quad \alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$$

(ambas antihorarias)



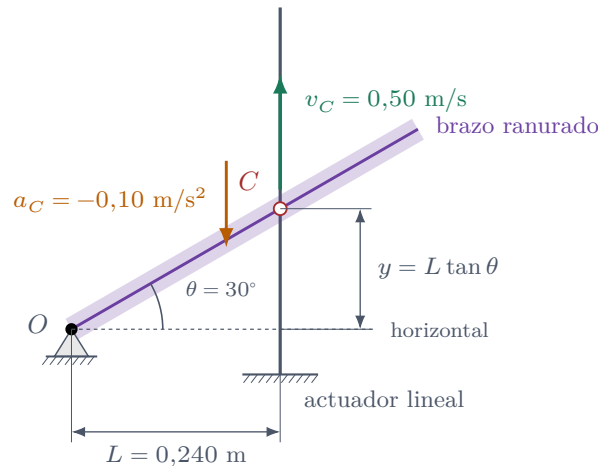
Problema 5.2 – Manivela y eslabón ranurado (réplica del Parcial 2022-II)

La manivela OA mide 200 mm y gira con velocidad angular constante de 15 rad/s . El pasador A se desliza dentro de la ranura del eslabón CB , que pivota en C , con $OC = 200 \text{ mm}$. Para la posición $\theta = 30^\circ$ determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ del eslabón ranurado, así como la velocidad y la aceleración de deslizamiento del pasador en la ranura.



Problema 5.3 – Actuador lineal y brazo ranurado (tipo Parcial 2024-II)

Un actuador lineal mueve un pasador C **verticalmente hacia arriba** con velocidad $v_C = 0,50$ m/s y desaceleración $a_C = -0,10$ m/s². El pasador se desliza en la ranura de un brazo que pivota en O , ubicado a una distancia horizontal $L = 0,240$ m de la línea del actuador. Para el instante en que el brazo forma $\theta = 30^\circ$ con la horizontal, determine $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ del brazo.

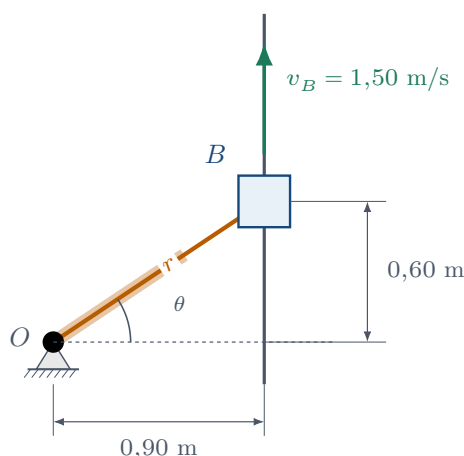


Sugerencia: la relación geométrica es $y = L \tan \theta$. Derive dos veces respecto al tiempo.

Problema 5.4 – Cilindro hidráulico que pivota (tipo Parcial 2020-II)

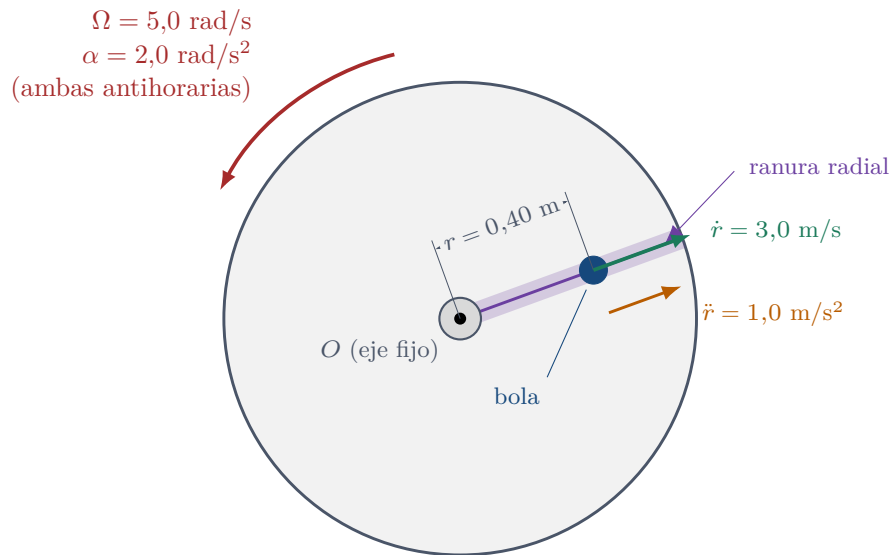
Un cilindro hidráulico pivota en O y su vástago está conectado a un bloque B que se desliza por una guía vertical con rapidez constante $v_B = 1,50$ m/s hacia arriba. En el instante mostrado, B está $0,90$ m a la derecha de O y $0,60$ m por encima de él. Determine:

- La rapidez con que se extiende el cilindro ($\dot{r}$) y su velocidad angular ($\dot{\theta}$).
- La aceleración de extensión ($\ddot{r}$) y la aceleración angular ($\ddot{\theta}$) del cilindro.



Problema 5.5 – Disco con ranura radial (Coriolis puro)

Un disco gira alrededor de su centro con $\Omega = 5,0 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$, ambas antihorarias. Una bola se desliza por una ranura radial del disco con $\dot{r} = 3,0 \text{ m/s}$ y $\ddot{r} = 1,0 \text{ m/s}^2$, ambas hacia afuera. Cuando la bola está a $r = 0,40 \text{ m}$ del centro, determine su velocidad y aceleración absolutas, e identifique qué fracción de la aceleración total es de Coriolis.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 5.1

Ruta de solución

Aplicación directa de la fórmula grande. Pon $\hat{e}_r$ a lo largo de la barra (hacia afuera) y $\hat{e}_\theta$ perpendicular. Cada término de la fórmula se calcula por separado y al final se suman.

PASO 1 Velocidad

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{r}}_{\text{arrastre del giro}} + \underbrace{\vec{v}_{rel}}_{\text{deslizamiento}} = (4,0)(0,60) \hat{e}_\theta + 1,5 \hat{e}_r = 1,5 \hat{e}_r + 2,4 \hat{e}_\theta \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1,5^2 + 2,4^2} = 2,83 \text{ m/s}$$

PASO 2 Aceleración, término por término

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \times \vec{r} &= (2,0)(0,60) \hat{e}_\theta = 1,2 \hat{e}_\theta && \text{(el giro se acelera)} \\ \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= -\Omega^2 r \hat{e}_r = -(16)(0,60) \hat{e}_r = -9,6 \hat{e}_r && \text{(centrípeta)} \\ 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} &= 2(4,0)(1,5) \hat{e}_\theta = 12,0 \hat{e}_\theta && \text{(Coriolis)} \\ \vec{a}_{rel} &= 0,8 \hat{e}_r && \text{(acelera el deslizamiento)} \end{aligned}$$

PASO 3 Sumar

$$\vec{a} = (-9,6 + 0,8) \hat{e}_r + (1,2 + 12,0) \hat{e}_\theta = -8,8 \hat{e}_r + 13,2 \hat{e}_\theta \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{77,44 + 174,24} = 15,86 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 2,83 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 15,86 \text{ m/s}^2$. El término de Coriolis vale $12,0 \text{ m/s}^2$, o sea el **76%** de la magnitud total.

Cuidado

Si hubieras olvidado Coriolis, te habría dado $|\vec{a}| = \sqrt{8,8^2 + 1,2^2} = 8,88 \text{ m/s}^2$: casi la mitad del valor correcto. Ese es el tamaño del error que cuesta el punto completo en el parcial.

Problema 5.2

Ruta de solución

El pasador A pertenece a la manivela (por eso sabemos todo de su movimiento absoluto) y a la vez desliza en la ranura del eslabón. Estrategia: calcular $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$ desde la manivela, y luego **proyectarlas** sobre $\hat{e}_r$ (a lo largo de la ranura) y $\hat{e}_\theta$ (perpendicular a la ranura).

PASO 1 Geometría: hallar r

El triángulo OCA es isósceles ($OA = OC = 0,20 \text{ m}$). Por ley de cosenos, o simplemente proyectando, la distancia de C al pasador es:

$$r = 2(0,20) \cos \theta = 0,4 \cos \theta$$

En $\theta = 30^\circ$: $r = 0,4(0,8660) = 0,3464$ m.

PASO 2 Velocidad y aceleración absolutas del pasador (vienen de la manivela)

$$|\vec{v}_A| = \omega_{OA} \cdot OA = (15)(0,20) = 3,0 \text{ m/s} \quad (\text{perpendicular a } OA)$$

$$|\vec{a}_A| = \omega_{OA}^2 \cdot OA = (225)(0,20) = 45,0 \text{ m/s}^2 \quad (\text{dirigida de } A \text{ hacia } O)$$

(No hay componente tangencial porque ω_{OA} es constante.)

PASO 3 Proyectar la velocidad sobre la ranura

Por la geometría del triángulo isósceles, $\vec{v}_A$ forma un ángulo θ con la dirección perpendicular a la ranura, de modo que:

$$v_r = \dot{r} = -|\vec{v}_A| \sin \theta = -3,0(0,5) = -1,50 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = |\vec{v}_A| \cos \theta = 3,0(0,8660) = 2,598 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2,598}{0,3464} = 7,50 \text{ rad/s}$$

PASO 4 Proyectar la aceleración sobre la ranura

$$a_r = -|\vec{a}_A| \cos \theta = -45(0,8660) = -38,97 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = -|\vec{a}_A| \sin \theta = -45(0,5) = -22,50 \text{ m/s}^2$$

PASO 5 Despejar $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$ de las fórmulas polares

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \implies \ddot{r} = -38,97 + (0,3464)(7,50)^2 = -38,97 + 19,49 = -19,49 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \implies -22,50 = 0,3464\ddot{\theta} + 2(-1,50)(7,50)$$

$$-22,50 = 0,3464\ddot{\theta} - 22,50 \implies \boxed{\ddot{\theta} = 0}$$

Respuesta: $\dot{\theta} = 7,50$ rad/s; $\ddot{\theta} = 0$; velocidad de deslizamiento $\dot{r} = -1,50$ m/s (el pasador se acerca a C); aceleración de deslizamiento $\ddot{r} = -19,49$ m/s².

Verificación por el otro camino

Como $r = 0,4 \cos \theta$, derivando directamente:

$$\dot{r} = -0,4 \sin \theta \dot{\theta} = -0,4(0,5)(7,5) = -1,50 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$\ddot{r} = -0,4 \cos \theta \dot{\theta}^2 = -0,4(0,866)(56,25) = -19,49 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Dos métodos independientes, el mismo número. Ese $\ddot{\theta} = 0$ no es casualidad: cuando $OA = OC$ y la manivela gira a velocidad constante, se demuestra que el eslabón también gira a velocidad angular constante ($\theta = \omega_{OA}t/2$).

Problema 5.3

Ruta de solución

Aquí ni siquiera hace falta la fórmula vectorial: hay una relación geométrica limpia entre y (lo que sube el actuador) y θ (lo que gira el brazo). Se deriva dos veces y listo. **Este es el método más rápido cuando puedes escribir una ecuación escalar.**

PASO 1 Relación geométrica

$$\tan \theta = \frac{y}{L} \Rightarrow y = L \tan \theta = 0,240 \tan \theta$$

PASO 2 Primera derivada

$$\dot{y} = L \sec^2 \theta \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{y} \cos^2 \theta}{L}$$

Con $\dot{y} = 0,50 \text{ m/s}$ y $\cos^2 30^\circ = 0,75$:

$$\dot{\theta} = \frac{(0,50)(0,75)}{0,240} = 1,5625 \text{ rad/s}$$

PASO 3 Segunda derivada

Derivando $\dot{y} = L \sec^2 \theta \dot{\theta}$ con la regla del producto (y $\frac{d}{dt} \sec^2 \theta = 2 \sec^2 \theta \tan \theta \dot{\theta}$):

$$\ddot{y} = L (\sec^2 \theta \ddot{\theta} + 2 \sec^2 \theta \tan \theta \dot{\theta}^2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y} \cos^2 \theta}{L} - 2 \tan \theta \dot{\theta}^2$$

PASO 4 Reemplazar

$$\ddot{\theta} = \frac{(-0,10)(0,75)}{0,240} - 2(0,5774)(1,5625)^2 = -0,3125 - 2,819 = -3,13 \text{ rad/s}^2$$

Respuesta: $\dot{\theta} = 1,56 \text{ rad/s}$ (antihoraria); $\ddot{\theta} = -3,13 \text{ rad/s}^2$ (frenando el giro).

Chequeo de sentido común

El segundo término $(-2,82)$ es **nueve veces mayor** que el primero $(-0,31)$. O sea: aunque el actuador casi no está desacelerando, el brazo sí frena fuerte su giro, y eso viene de la *geometría* ($\tan \theta$ crece cada vez más rápido). Si tu respuesta hubiera dado casi cero, es señal de que olvidaste el término $2 \tan \theta \dot{\theta}^2$.

Problema 5.4

Ruta de solución

Aquí el “pasador” es el bloque B , cuya velocidad absoluta conocemos por completo (sube en línea recta). Lo único que hay que hacer es **proyectarla** sobre la dirección del cilindro ($\hat{e}_r$) y la perpendicular ($\hat{e}_\theta$).

PASO 1 Geometría

$$r = \sqrt{0,90^2 + 0,60^2} = 1,0817 \text{ m}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{0,60}{0,90}\right) = 33,69^\circ$$

$$\hat{e}_r = (\cos 33,69^\circ, \sin 33,69^\circ) = (0,8321; 0,5547), \quad \hat{e}_\theta = (-0,5547; 0,8321)$$

PASO 2 Proyectar la velocidad $\vec{v}_B = (0; 1,50) \text{ m/s}$

$$\dot{r} = \vec{v}_B \cdot \hat{e}_r = (1,50)(0,5547) = 0,832 \text{ m/s}$$

$$r\dot{\theta} = \vec{v}_B \cdot \hat{e}_\theta = (1,50)(0,8321) = 1,248 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1,248}{1,0817} = 1,154 \text{ rad/s}$$

PASO 3 Proyectar la aceleración $\vec{a}_B = \vec{0}$

Como v_B es constante, $\vec{a}_B = 0$, así que **las dos componentes polares de la aceleración son cero**:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 = (1,0817)(1,154)^2 = 1,440 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = \frac{-2(0,832)(1,154)}{1,0817} = -1,775 \text{ rad/s}^2$$

Respuesta: (a) $\dot{r} = 0,832 \text{ m/s}$ (se extiende); $\dot{\theta} = 1,154 \text{ rad/s}$. (b) $\ddot{r} = 1,440 \text{ m/s}^2$; $\ddot{\theta} = -1,775 \text{ rad/s}^2$.

Lo importante de este problema

El bloque va a **velocidad constante** (aceleración cero) y sin embargo el cilindro tiene aceleración de extensión y aceleración angular, ¡y ninguna es cero! La razón: a_r y a_θ valen cero *como suma*, pero cada término individual no. El $\ddot{r}$ existe para cancelar la centrípeta, y el $\ddot{\theta}$ existe para cancelar el Coriolis. Entender esto es entender el tema completo.

Problema 5.5**PASO 1 Velocidad**

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\Omega\hat{e}_\theta = 3,0\hat{e}_r + (0,40)(5,0)\hat{e}_\theta = 3,0\hat{e}_r + 2,0\hat{e}_\theta \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4} = 3,61 \text{ m/s}$$

PASO 2 Aceleración, término por término

$$\text{Relativa: } \ddot{r} = 1,0\hat{e}_r$$

$$\text{Centrípeta: } -r\Omega^2 = -(0,40)(25) = -10,0\hat{e}_r$$

$$\text{Angular: } r\alpha = (0,40)(2,0) = 0,80\hat{e}_\theta$$

$$\text{Coriolis: } 2\dot{r}\Omega = 2(3,0)(5,0) = 30,0\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (1,0 - 10,0)\hat{e}_r + (0,80 + 30,0)\hat{e}_\theta = -9,0\hat{e}_r + 30,8\hat{e}_\theta \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{81 + 948,6} = 32,09 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 3,61 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 32,09 \text{ m/s}^2$. El término de Coriolis ($30,0 \text{ m/s}^2$) representa el **94%** de la magnitud total.

Chequeo de sentido común

En este problema Coriolis se come casi toda la aceleración. Es el mismo efecto que hace que los huracanes giren y que sea difícil caminar en línea recta sobre un carrusel. Si alguna vez resuelves un problema con ranuras y te da una aceleración chiquita, sospecha inmediatamente que olvidaste el $2\dot{r}\dot{\theta}$.

Hoja de respuestas rápida — Taller 5

5.1 $\vec{v} = 1,5\hat{e}_r + 2,4\hat{e}_\theta$, $|v| = 2,83 \text{ m/s}$; $\vec{a} = -8,8\hat{e}_r + 13,2\hat{e}_\theta$, $|a| = 15,86 \text{ m/s}^2$; Coriolis = 12,0.

5.2 $r = 0,3464 \text{ m}$; $\dot{\theta} = 7,50 \text{ rad/s}$; $\ddot{\theta} = 0$; $\dot{r} = -1,50 \text{ m/s}$; $\ddot{r} = -19,49 \text{ m/s}^2$.

5.3 $\dot{\theta} = 1,5625 \text{ rad/s}$; $\ddot{\theta} = -3,13 \text{ rad/s}^2$. **5.4** $\dot{r} = 0,832$; $\dot{\theta} = 1,154$; $\ddot{r} = 1,440$; $\ddot{\theta} = -1,775$.

5.5 $|v| = 3,61 \text{ m/s}$; $\vec{a} = -9,0\hat{e}_r + 30,8\hat{e}_\theta$, $|a| = 32,09 \text{ m/s}^2$; Coriolis = 30,0.

SIMULACRO DEL PARCIAL 1

Tres puntos con el formato, la dificultad y los temas de los parciales reales

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • **Tiempo sugerido:** 2 horas, cronómetro en mano

Cómo hacer este simulacro para que sirva

Hazlo **una sola vez**, de corrido, sin mirar formulario ni apuntes salvo una hoja de fórmulas que tú mismo escribas antes de empezar. Pon un cronómetro de 2 horas. Si te trabas en un punto, pasa al siguiente y vuelve. Solo cuando suene el cronómetro abres la Parte B. El objetivo no es sacar 5 aquí: es descubrir *dónde* se te va el tiempo y *qué* paso se te olvida, con tiempo de sobra para corregirlo.

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá

Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Principios de Dinámica 2017271

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 1

Nombre: _____ **Código:** _____ **Nota:** _____

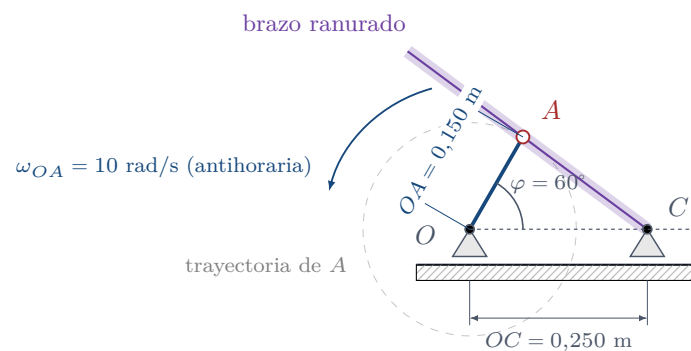
Duración: 120 minutos • **Tres puntos de igual valor** • Escribe unidades en todo resultado.

PARTE A — Examen

Punto 1 (35 minutos)

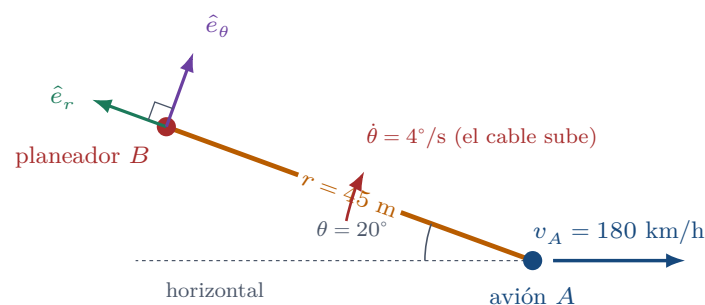
La manivela OA , de $0,150$ m de longitud, gira con velocidad angular **constante** $\omega_{OA} = 10$ rad/s en sentido antihorario. El pasador A se desliza dentro de la ranura del brazo pivotado en C , donde $OC = 0,250$ m. Para el instante en que la manivela forma $\varphi = 60^\circ$ con la línea OC , determine:

- La velocidad angular del brazo ranurado y la velocidad de deslizamiento del pasador en la ranura.
- La aceleración angular del brazo y la aceleración de deslizamiento.
- El valor del término de Coriolis.



Punto 2 (30 minutos)

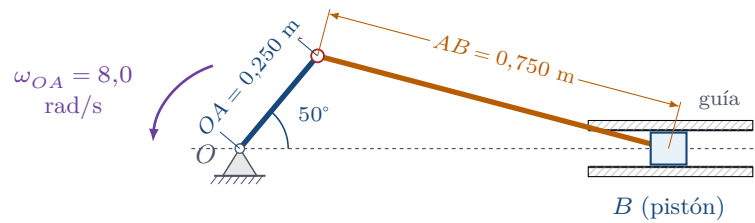
Un avión A vuela horizontalmente con rapidez constante $v_A = 180$ km/h y remolca un planeador B mediante un cable de longitud constante $r = 45$ m. El planeador gana altitud de modo que el ángulo θ entre el cable y la horizontal crece a razón constante de 4 grados por segundo. Para $\theta = 20^\circ$ determine la velocidad y la aceleración del planeador (magnitud y dirección).



Punto 3 (40 minutos)

En el mecanismo biela-manivela mostrado, la manivela OA mide $0,250\text{ m}$ y gira en sentido antihorario con velocidad angular **constante** $\omega_{OA} = 8,0\text{ rad/s}$. La biela AB mide $0,750\text{ m}$ y el pistón B se desliza sobre la horizontal que pasa por O . Para el instante en que OA forma 50° con la horizontal, determine:

- La velocidad angular de la biela y la velocidad del pistón (verifíquelas con el centro instantáneo de rotación).
- La aceleración angular de la biela y la aceleración del pistón.



PARTE B — Solución completa

Punto 1

Ruta de solución

Ranura $\Rightarrow$ marco rotatorio. El pasador A pertenece a la manivela, así que su velocidad y aceleración absolutas se conocen por completo. Lo único que hay que hacer es **proyectarlas** sobre la ranura ($\hat{e}_r$) y su perpendicular ($\hat{e}_\theta$), y despejar.

PASO 1 Geometría

$$A = 0,150(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = (0,0750; 0,12990) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{A/C} = A - C = (0,0750 - 0,250; 0,12990) = (-0,1750; 0,12990) \text{ m}$$

$$r = |\vec{r}_{A/C}| = \sqrt{0,03063 + 0,01687} = 0,21794 \text{ m}$$

Vectores unitarios de la ranura:

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}_{A/C}}{r} = (-0,80297; 0,59605), \quad \hat{e}_\theta = (-0,59605; -0,80297)$$

PASO 2 Velocidad y aceleración absolutas de A

$$\vec{v}_A = \omega_{OA} \hat{k} \times \vec{r}_{A/O} = 10 \hat{k} \times (0,0750; 0,12990) = (-1,29904; 0,75000) \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_A| = 1,500 \text{ m/s} \quad \checkmark (= 0,150 \times 10)$$

$$\vec{a}_A = -\omega_{OA}^2 \vec{r}_{A/O} = -100(0,0750; 0,12990) = (-7,500; -12,990) \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_A| = 15,00 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark (= 0,150 \times 100)$$

PASO 3 (a) Proyectar la velocidad

$$\dot{r} = \vec{v}_A \cdot \hat{e}_r = (-1,29904)(-0,80297) + (0,75000)(0,59605) = 1,4901 \text{ m/s}$$

$$r\dot{\theta} = \vec{v}_A \cdot \hat{e}_\theta = (-1,29904)(-0,59605) + (0,75000)(-0,80297) = 0,17206 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = \frac{0,17206}{0,21794} = 0,7895 \text{ rad/s}$$

PASO 4 (b) Proyectar la aceleración

$$a_r = \vec{a}_A \cdot \hat{e}_r = (-7,500)(-0,80297) + (-12,990)(0,59605) = -1,7206 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = \vec{a}_A \cdot \hat{e}_\theta = (-7,500)(-0,59605) + (-12,990)(-0,80297) = 14,901 \text{ m/s}^2$$

Ahora se despejan $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = -1,7206 + (0,21794)(0,7895)^2 = -1,7206 + 0,13583 = -1,5848 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{\theta} = \frac{a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = \frac{14,901 - 2(1,4901)(0,7895)}{0,21794} = \frac{14,901 - 2,3528}{0,21794} = 57,58 \text{ rad/s}^2$$

PASO 5 (c) Término de Coriolis

$$|2\dot{r}\dot{\theta}| = 2(1,4901)(0,7895) = 2,353 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\dot{\theta} = 0,790 \text{ rad/s}$ (antihoraria); $\dot{r} = 1,490 \text{ m/s}$ (el pasador se aleja de C). (b) $\ddot{\theta} = 57,6 \text{ rad/s}^2$; $\ddot{r} = -1,585 \text{ m/s}^2$. (c) Coriolis = $2,35 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

Dos verificaciones rápidas de examen: $|\vec{v}_A|$ tiene que dar $\omega \cdot OA = 1,5 \text{ m/s}$ y $|\vec{a}_A|$ tiene que dar $\omega^2 \cdot OA = 15 \text{ m/s}^2$. Si esas dos no cuadran, todo lo demás está mal y no vale la pena seguir. Además, $\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = \sqrt{1,4901^2 + 0,17206^2} = 1,500 \text{ m/s}$: la proyección conservó la magnitud, como debe ser.

Punto 2

PASO 1 Unidades y datos

$$v_A = \frac{180}{3,6} = 50,0 \text{ m/s}, \quad \dot{\theta} = 4 \frac{\text{grados}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{180} = 0,069813 \text{ rad/s}$$

$$r = 45 \text{ m}, \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

PASO 2 Velocidad relativa del planeador respecto al avión

$$|\vec{v}_{B/A}| = r\dot{\theta} = 45(0,069813) = 3,1416 \text{ m/s} \quad (\text{perpendicular al cable})$$

Tomando $\hat{i}$ en el sentido de vuelo (el planeador queda *atrás* y *arriba*):

$$\vec{v}_{B/A} = 3,1416(\sin 20^\circ \hat{i} + \cos 20^\circ \hat{j}) = (1,0745 \hat{i} + 2,9521 \hat{j}) \text{ m/s}$$

PASO 3 Velocidad absoluta

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = (50 + 1,0745) \hat{i} + 2,9521 \hat{j} = (51,074 \hat{i} + 2,952 \hat{j}) \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{2608,6 + 8,715} = 51,16 \text{ m/s}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{2,952}{51,074}\right) = 3,31^\circ$$

PASO 4 Aceleración

Como $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$, la aceleración relativa es solo centrípeta:

$$|\vec{a}_{B/A}| = r\dot{\theta}^2 = 45(0,069813)^2 = 0,2193 \text{ m/s}^2$$

dirigida **del planeador hacia el avión**. Y como $\vec{a}_A = 0$:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} = (0,2061 \hat{i} - 0,0750 \hat{j}) \text{ m/s}^2, \quad |\vec{a}_B| = 0,219 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}_B| = 51,16 \text{ m/s}$ a $3,31^\circ$ sobre la horizontal. $|\vec{a}_B| = 0,219 \text{ m/s}^2$ a lo largo del cable, del planeador hacia el avión.

El error clásico de este punto

Convertir mal 4 grados/s. **Hay que pasarlo a rad/s** antes de usarlo en $r\dot{\theta}$. Si dejas 4, te da $r\dot{\theta} = 180 \text{ m/s}$ y el planeador vuela más rápido que un caza. Cuando una respuesta salga absurda, lo primero que se revisa son las unidades angulares.

Punto 3

PASO 1 Geometría

$$A = 0,250(\cos 50^\circ, \sin 50^\circ) = (0,16070; 0,19151) \text{ m}$$

$$x_B = 0,16070 + \sqrt{0,750^2 - 0,19151^2} = 0,16070 + 0,72514 = 0,88583 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (0,72514; -0,19151) \text{ m}$$

PASO 2 Velocidad de A

$$\vec{v}_A = 8\hat{k} \times (0,16070; 0,19151) = (-1,53209; 1,28558) \text{ m/s}, \quad |\vec{v}_A| = 2,000 \text{ m/s}$$

PASO 3 (a) Velocidad angular de la biela y velocidad del pistón

$$v_B \hat{i} = \vec{v}_A + \omega_{AB} \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} = \vec{v}_A + \omega_{AB}(0,19151 \hat{i} + 0,72514 \hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = 1,28558 + 0,72514 \omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = -1,7729 \text{ rad/s (horaria)}$$

$$\hat{i}: v_B = -1,53209 + 0,19151(-1,7729) = -1,8716 \text{ m/s}$$

PASO 4 Verificación con el centro instantáneo

La perpendicular a $\vec{v}_A$ es la recta OA prolongada; la perpendicular a $\vec{v}_B$ es la vertical por B :

$$y_{\text{CIR}} = x_B \tan 50^\circ = 0,88583(1,19175) = 1,05570 \Rightarrow \text{CIR} = (0,8858; 1,0557) \text{ m}$$

$$d_A = \sqrt{0,72514^2 + 0,86419^2} = 1,12811 \text{ m} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{2,000}{1,12811} = 1,7729 \text{ rad/s } \checkmark$$

$$d_B = 1,05570 \text{ m} \Rightarrow v_B = 1,7729(1,05570) = 1,8716 \text{ m/s } \checkmark$$

PASO 5 (b) Aceleraciones

$$\vec{a}_A = -64(0,16070; 0,19151) = (-10,2846; -12,2567) \text{ m/s}^2$$

$$a_B \hat{i} = \vec{a}_A + \alpha_{AB}(0,19151 \hat{i} + 0,72514 \hat{j}) - \omega_{AB}^2(0,72514 \hat{i} - 0,19151 \hat{j})$$

con $\omega_{AB}^2 = 3,14308$:

$$\hat{j}: 0 = -12,2567 + 0,72514 \alpha_{AB} + 0,60195 \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{11,6547}{0,72514} = 16,073 \text{ rad/s}^2$$

$$\hat{i}: a_B = -10,2846 + 0,19151(16,073) - 3,14308(0,72514) = -10,2846 + 3,0781 - 2,2792$$

$$a_B = -9,486 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\omega_{AB} = 1,773 \text{ rad/s horaria}$; $v_B = 1,872 \text{ m/s hacia la izquierda}$. (b) $\alpha_{AB} = 16,07 \text{ rad/s}^2 \text{ antihoraria}$; $a_B = 9,49 \text{ m/s}^2 \text{ hacia la izquierda}$.

Autoevaluación: ¿qué me dice mi resultado?

Si fallaste el Punto 1	Repasa el Taller 5 completo. Es el tema de mayor peso.
Si fallaste el Punto 2	Repasa el Taller 3, sección de movimiento relativo + polares, y revisa conversión de unidades angulares.
Si fallaste el Punto 3	Repasa el Taller 4, problemas 4.4 y 4.5.
Si te faltó tiempo	No es problema de teoría: practica los problemas ya resueltos hasta que el planteamiento salga en menos de 5 minutos.
Si los planteaste bien pero te dio mal el número	El error está en signos o en la calculadora en grados/radianes. Adopta la costumbre de escribir siempre los vectores en componentes $(x; y)$ antes de operar.

Hoja de respuestas rápida — Simulacro

P1 $r = 0,21794 \text{ m}$; $\dot{r} = 1,4901 \text{ m/s}$; $\dot{\theta} = 0,7895 \text{ rad/s}$; $\ddot{r} = -1,5848 \text{ m/s}^2$; $\ddot{\theta} = 57,58 \text{ rad/s}^2$; Coriolis = $2,353 \text{ m/s}^2$.

P2 $|\vec{v}_B| = 51,16 \text{ m/s}$ a $3,31^\circ$; $|\vec{a}_B| = 0,219 \text{ m/s}^2$ hacia el avión.

P3 $\omega_{AB} = 1,773 \text{ rad/s}$ (horaria); $v_B = 1,872 \text{ m/s} \leftarrow$; CIR $(0,886; 1,056) \text{ m}$; $\alpha_{AB} = 16,07 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 9,49 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.