

SIMULACRO 2

Ranura recta, proyectil desde un acantilado y rueda que arrastra una barra

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • Tiempo sugerido: 1 h 45 min, cronómetro en mano

Cómo usar este simulacro

Hazlo **de corrido**, con cronómetro, sin abrir la Parte B. Si te trabas más de 8 minutos en un punto, pásalo y vuelve al final. Solo cuando suene el cronómetro comparas. Lo que buscas no es la nota: es ver *en qué paso* se te fue el tiempo.

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá

Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Principios de Dinámica 2017271

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 2

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

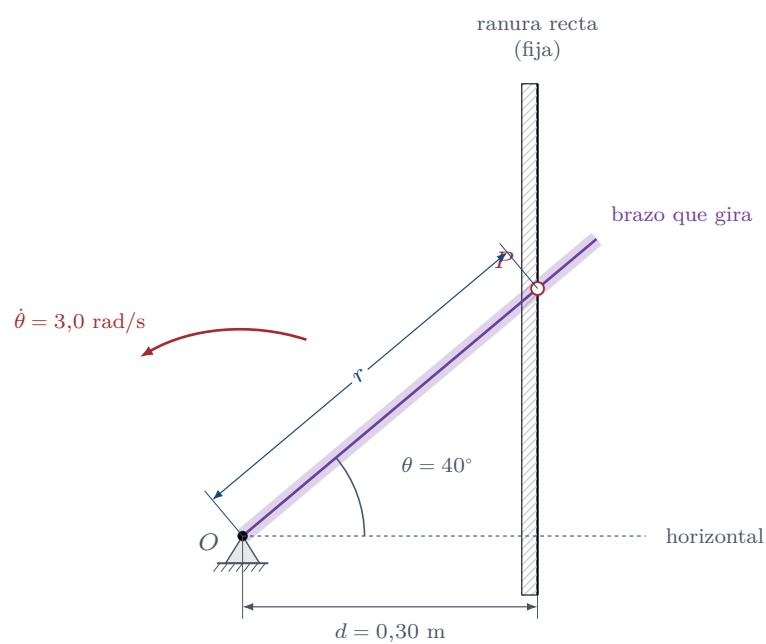
Duración: 105 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

PARTE A — Examen

Punto 1 (35 minutos) — Coordenadas polares

Un brazo gira alrededor de O con velocidad angular **constante** $\dot{\theta} = 3,0$ rad/s en sentido antihorario. Un pasador P está obligado a moverse por una **ranura recta vertical** situada a $d = 0,30$ m de O , y a la vez se desliza dentro del brazo. Para el instante en que $\theta = 40^\circ$ determine:

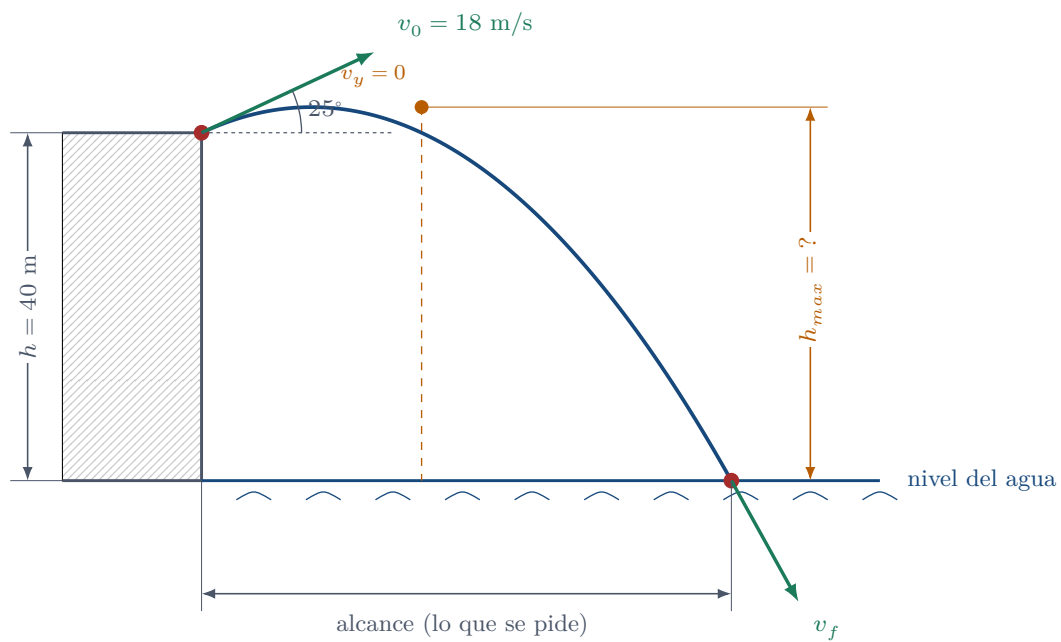
- r , $\dot{r}$ y $\ddot{r}$.
- Las componentes polares de la velocidad y de la aceleración del pasador, y sus magnitudes.
- El valor del término de Coriolis, y **verifique** que la velocidad y la aceleración resultan verticales.



Punto 2 (30 minutos) — Movimiento curvilíneo x - y

Desde lo alto de un acantilado de $h = 40$ m se lanza una piedra con rapidez inicial $v_0 = 18$ m/s formando 25° **por encima** de la horizontal. Desprecie la resistencia del aire ($g = 9,81$ m/s²). Determine:

- (a) El tiempo total de vuelo hasta tocar el agua.
- (b) La distancia horizontal desde la base del acantilado hasta el punto de caída.
- (c) La altura máxima que alcanza la piedra medida **desde el nivel del agua**.
- (d) La magnitud y la dirección de la velocidad justo antes del impacto.



Punto 3 (40 minutos) — Cinemática de cuerpo rígido

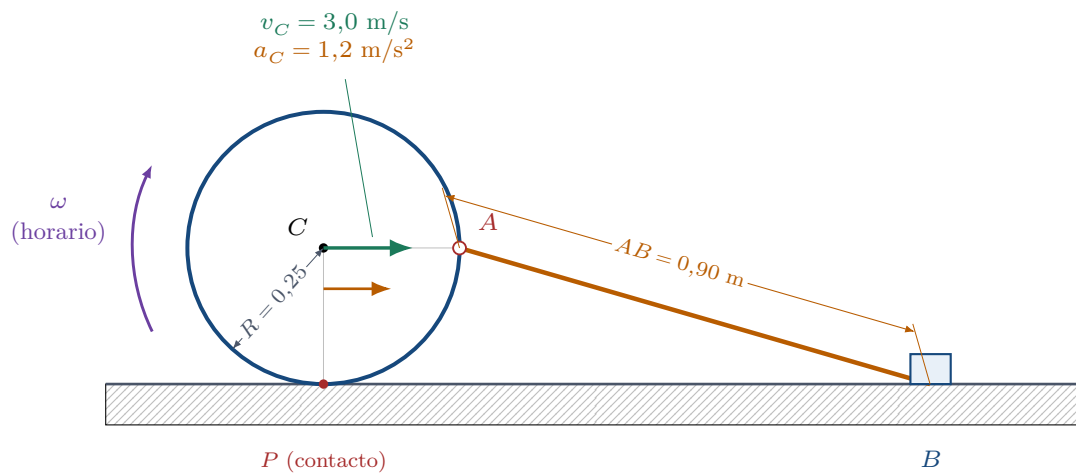
Una rueda de radio $R = 0,25$ m **rueda sin deslizar** sobre el piso; su centro C avanza hacia la derecha con $v_C = 3,0$ m/s y $a_C = 1,2$ m/s². Una barra AB de $0,90$ m está articulada en A , el punto del borde de la rueda que en este instante está al **mismo nivel que el centro**, en el lado derecho. El otro extremo B desliza sobre el piso. Determine:

(a) La velocidad angular y la aceleración angular de la rueda.

(b) $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$.

(c) ω_{AB} y la velocidad del extremo B .

(d) α_{AB} y la aceleración del extremo B .



PARTE B — Solución completa

Punto 1 — Coordenadas polares

Ruta de solución

La ranura es una **recta vertical**: eso es la ecuación de restricción. En polares esa recta se escribe $r \cos \theta = d$, o sea $r = d / \cos \theta$. Derivas esa expresión dos veces (¡con regla de la cadena, aparece $\dot{\theta}$!) y ya tienes todo para meter en las fórmulas polares.

PASO 1 Escribir la restricción geométrica

La distancia horizontal de O al pasador es siempre d :

$$r \cos \theta = d \implies r = \frac{d}{\cos \theta} = d \sec \theta$$

En $\theta = 40^\circ$:

$$r = \frac{0,30}{\cos 40^\circ} = \frac{0,30}{0,76604} = 0,39162 \text{ m}$$

PASO 2 Derivar una vez

$$\dot{r} = d \sec \theta \tan \theta \dot{\theta} = \frac{d \sin \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = \frac{0,30(0,64279)}{(0,76604)^2} (3,0) = 0,98583 \text{ m/s}$$

El $\dot{\theta}$ que todo el mundo olvida

θ depende del tiempo, así que $\frac{d}{dt}(\sec \theta) = \sec \theta \tan \theta \cdot \dot{\theta}$. Si escribes solo $\sec \theta \tan \theta$ pierdes el punto completo.

PASO 3 Derivar otra vez

Con $\ddot{\theta} = 0$ (velocidad angular constante):

$$\ddot{r} = d \dot{\theta}^2 \frac{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} = 0,30(9,0) \frac{0,58682 + 2(0,41318)}{0,44953} = 8,4879 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $r = 0,3916 \text{ m}$, $\dot{r} = 0,9858 \text{ m/s}$, $\ddot{r} = 8,488 \text{ m/s}^2$

PASO 4 Velocidad en polares

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = 0,9858 \text{ m/s} \\ v_\theta &= r \dot{\theta} = (0,39162)(3,0) = 1,1749 \text{ m/s} \\ |\vec{v}| &= \sqrt{0,9858^2 + 1,1749^2} = 1,5337 \text{ m/s} \end{aligned}$$

PASO 5 Aceleración en polares

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = 8,4879 - (0,39162)(9,0) = 8,4879 - 3,5246 = 4,9633 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= \underbrace{r \ddot{\theta}}_{=0} + \underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{Coriolis}} = 2(0,98583)(3,0) = 5,9150 \text{ m/s}^2 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{4,9633^2 + 5,9150^2} = 7,7215 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 1,534 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 7,722 \text{ m/s}^2$; término de Coriolis $2\dot{r}\dot{\theta} = 5,915 \text{ m/s}^2$

La prueba que vale oro

El pasador va por una recta **vertical**, así que su velocidad y su aceleración tienen que ser verticales: la componente horizontal debe dar cero. Proyectando a cartesianas ($\hat{e}_r$ apunta a θ , $\hat{e}_\theta$ a $\theta + 90^\circ$):

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta = 0,9858(0,76604) - 1,1749(0,64279) = 0,7552 - 0,7552 = 0 \quad \checkmark$$

$$a_x = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta = 4,9633(0,76604) - 5,9150(0,64279) = 3,8021 - 3,8021 = 0 \quad \checkmark$$

Y $v_y = 1,534 \text{ m/s}$ hacia arriba, $a_y = 7,722 \text{ m/s}^2$ hacia arriba. Perfecto.

Punto 2 — Projétil

Ruta de solución

Separa en dos problemas independientes: en x movimiento uniforme, en y caída libre. El único puente entre los dos es el **tiempo**. Pon el origen en el punto de lanzamiento y y positivo hacia arriba; entonces el agua está en $y = -40 \text{ m}$.

PASO 1 Descomponer la velocidad inicial

$$v_{0x} = 18 \cos 25^\circ = 16,314 \text{ m/s} \quad v_{0y} = 18 \sin 25^\circ = 7,607 \text{ m/s}$$

PASO 2 Tiempo de vuelo (ecuación en y)

Con origen en el lanzamiento, el agua está en $y = -40$:

$$-40 = 7,607 t - \frac{1}{2}(9,81)t^2 \implies 4,905 t^2 - 7,607 t - 40 = 0$$

$$t = \frac{7,607 + \sqrt{7,607^2 + 4(4,905)(40)}}{2(4,905)} = \frac{7,607 + 28,029}{9,81} = 3,7345 \text{ s}$$

(La raíz negativa se descarta: es un tiempo anterior al lanzamiento.)

PASO 3 Alcance horizontal

$$x = v_{0x} t = 16,314(3,7345) = 60,92 \text{ m}$$

PASO 4 Altura máxima

En el punto más alto $v_y = 0$:

$$t_{sub} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{7,607}{9,81} = 0,7754 \text{ s} \quad \Delta y = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{57,87}{19,62} = 2,950 \text{ m}$$

Medida desde el agua: $h_{max} = 40 + 2,950 = 42,95 \text{ m}$.

PASO 5 Velocidad de impacto

$$v_x = 16,314 \text{ m/s} \quad (\text{nunca cambia})$$

$$v_y = v_{0y} - g t = 7,607 - 9,81(3,7345) = -29,029 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_f| = \sqrt{16,314^2 + 29,029^2} = 33,30 \text{ m/s}$$

$$\beta = \arctan \frac{29,029}{16,314} = 60,7^\circ \text{ por debajo de la horizontal}$$

Respuesta: (a) $t = 3,73 \text{ s}$ (b) alcance = 60,9 m (c) $h_{max} = 42,95 \text{ m}$ sobre el agua (d) $|\vec{v}_f| = 33,3 \text{ m/s}$ a $60,7^\circ$ bajo la horizontal

Sentido común

La piedra sube apenas 2,95 m y baja 42,95 m: cae mucho más de lo que sube, así que la velocidad final debe ser bastante mayor que los 18 m/s iniciales y muy inclinada hacia abajo. 33,3 m/s a $-60,7^\circ$ encaja.

Punto 3 — Rueda que arrastra una barra

Ruta de solución

Son **dos cuerpos rígidos encadenados**. Primero la rueda: rodar sin deslizar te da ω y α , y con eso sacas $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$ del punto de unión. Luego la barra: A ya es dato, B solo puede moverse horizontal. Ecuación vectorial, dos componentes, dos incógnitas. Y lo repites para aceleraciones.

PASO 1 Rodar sin deslizar

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{3,0}{0,25} = 12,0 \text{ rad/s (horaria)} \quad \alpha = \frac{a_C}{R} = \frac{1,2}{0,25} = 4,80 \text{ rad/s}^2 \text{ (horaria)}$$

Como son horarias, en vectores: $\vec{\omega} = -12\hat{k}$ y $\vec{\alpha} = -4,8\hat{k}$.

PASO 2 Coordenadas y velocidad de A

Poniendo el origen en el punto de contacto: $C = (0; 0,25)$ y $A = (0,25; 0,25)$, así que $\vec{r}_{A/C} = 0,25\hat{i}$.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C} = 3,0\hat{i} + (-12\hat{k}) \times (0,25\hat{i}) = 3,0\hat{i} - 3,0\hat{j}$$

$$|\vec{v}_A| = 4,243 \text{ m/s a } 45^\circ \text{ hacia abajo}$$

PASO 3 Aceleración de A

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/C} - \omega^2 \vec{r}_{A/C} = 1,2\hat{i} + (-4,8\hat{k}) \times (0,25\hat{i}) - 144(0,25\hat{i}) \\ &= 1,2\hat{i} - 1,2\hat{j} - 36,0\hat{i} = (-34,80\hat{i} - 1,20\hat{j}) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: $\vec{v}_A = (3,0\hat{i} - 3,0\hat{j}) \text{ m/s}$; $\vec{a}_A = (-34,8\hat{i} - 1,2\hat{j}) \text{ m/s}^2$

PASO 4 Ubicar B

B está sobre el piso ($y = 0$) y $|AB| = 0,90$:

$$B_x = 0,25 + \sqrt{0,90^2 - 0,25^2} = 0,25 + 0,86458 = 1,1146 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (0,86458\hat{i} - 0,25\hat{j}) \text{ m}$$

PASO 5 Velocidad de B

B solo se mueve horizontal, así que $\vec{v}_B = v_B\hat{i}$:

$$v_B\hat{i} = (3,0\hat{i} - 3,0\hat{j}) + \omega_{AB}\hat{k} \times (0,86458\hat{i} - 0,25\hat{j})$$

Recordando que $\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = -y\hat{i} + x\hat{j}$:

$$v_B\hat{i} = (3,0\hat{i} - 3,0\hat{j}) + \omega_{AB}(0,25\hat{i} + 0,86458\hat{j})$$

$$\hat{j}: \quad 0 = -3,0 + 0,86458\omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = 3,470 \text{ rad/s (antihoraria)}$$

$$\hat{i}: \quad v_B = 3,0 + 3,470(0,25) = 3,867 \text{ m/s}$$

PASO 6 Aceleración de B

$$a_B\hat{i} = \vec{a}_A + \alpha_{AB}\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$$

$$a_B \hat{i} = (-34,80 \hat{i} - 1,20 \hat{j}) + \alpha_{AB}(0,25 \hat{i} + 0,86458 \hat{j}) - 12,040(0,86458 \hat{i} - 0,25 \hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = -1,20 + 0,86458 \alpha_{AB} + 3,010 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{AB} = -2,094 \text{ rad/s}^2$$

$$\hat{i}: a_B = -34,80 + (-2,094)(0,25) - 12,040(0,86458) = -45,73 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $\omega_{AB} = 3,47 \text{ rad/s}$ antihoraria; $v_B = 3,87 \text{ m/s}$ hacia la derecha; $\alpha_{AB} = 2,09 \text{ rad/s}^2$ horaria; $a_B = 45,7 \text{ m/s}^2$ hacia la **izquierda** (está frenando fuerte)

¿Tiene sentido ese a_B tan grande?

Sí. El punto A pertenece a una rueda que gira a 12 rad/s : su aceleración centrípeta sola vale $\omega^2 R = 144(0,25) = 36 \text{ m/s}^2$, apuntando hacia el centro. Esa aceleración enorme es la que la barra le transmite a B . En cuerpo rígido, las aceleraciones crecen con ω^2 , así que números de decenas de m/s^2 son normales.

Respuestas rápidas del Simulacro 2

- P1** $r = 0,392 \text{ m}$; $\dot{r} = 0,986 \text{ m/s}$; $\ddot{r} = 8,49 \text{ m/s}^2$; $|\vec{v}| = 1,534 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 7,722 \text{ m/s}^2$; Coriolis = $5,915 \text{ m/s}^2$.
- P2** $t = 3,73 \text{ s}$; alcance = $60,9 \text{ m}$; $h_{max} = 42,95 \text{ m}$; $|\vec{v}_f| = 33,3 \text{ m/s}$ a $60,7^\circ$ bajo la horizontal.
- P3** $\omega = 12 \text{ rad/s}$; $\alpha = 4,8 \text{ rad/s}^2$; $\vec{v}_A = (3,0; -3,0)$; $\vec{a}_A = (-34,8; -1,2)$; $\omega_{AB} = 3,47 \text{ rad/s}$; $v_B = 3,87 \text{ m/s}$; $\alpha_{AB} = -2,09 \text{ rad/s}^2$; $a_B = -45,7 \text{ m/s}^2$.