

SIMULACRO 3

Guía horizontal en polares, aparejo de tres tramos y barra entre dos guías

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • Tiempo sugerido: 1 h 45 min, cronómetro en mano

Antes de empezar

Escribe en una hoja aparte, **de memoria**, las tres fórmulas polares y la ecuación vectorial de cuerpo rígido. Si no te salen, ese es tu tema débil y ya sabes qué estudiar esta semana. Luego sí arranca el cronómetro.

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá

Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Principios de Dinámica 2017271

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 3

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

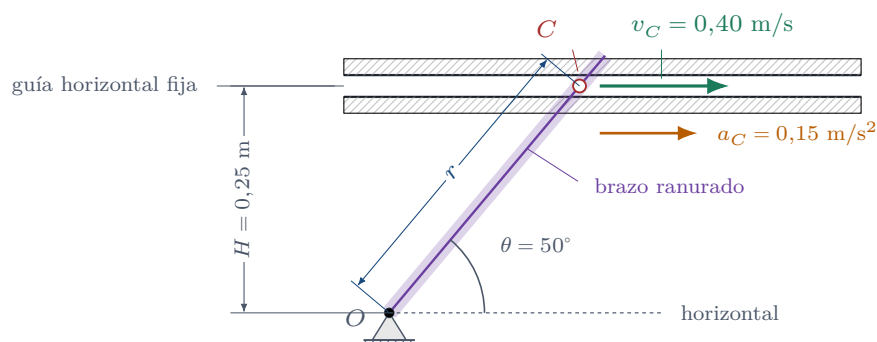
Duración: 105 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

PARTE A — Examen

Punto 1 (35 minutos) — Coordenadas polares

Un brazo ranurado pivota en O . Un pasador C se desliza dentro de la ranura del brazo y, al mismo tiempo, está obligado a moverse sobre una **guía horizontal fija** situada a $H = 0,25$ m por encima de O . En el instante mostrado el pasador va hacia la derecha con $v_C = 0,40$ m/s y $a_C = 0,15$ m/s² (acelerando), y el brazo forma $\theta = 50^\circ$ con la horizontal. Determine:

- r y $\dot{r}$, y la velocidad angular $\dot{\theta}$ del brazo.
- $\ddot{r}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ del brazo.
- El término de Coriolis y su interpretación física.



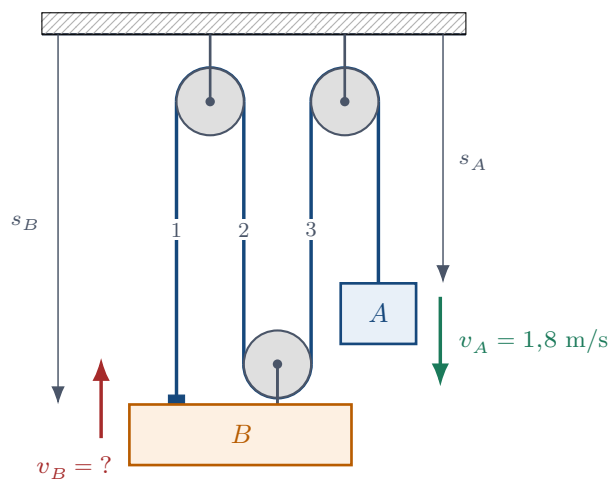
Punto 2 (25 minutos) — Movimiento dependiente

En el aparejo de la figura, el bloque B está sostenido por **tres tramos** de cable, de modo que la restricción del sistema es

$$s_A + 3s_B = L$$

El bloque A baja con rapidez $v_A = 1,8 \text{ m/s}$ y aceleración $a_A = 0,6 \text{ m/s}^2$ (ambas hacia abajo). Determine:

- La velocidad y la aceleración de B (magnitud y sentido).
- La velocidad de A **vista desde** B .
- Cuánto sube B mientras A baja $1,2 \text{ m}$.

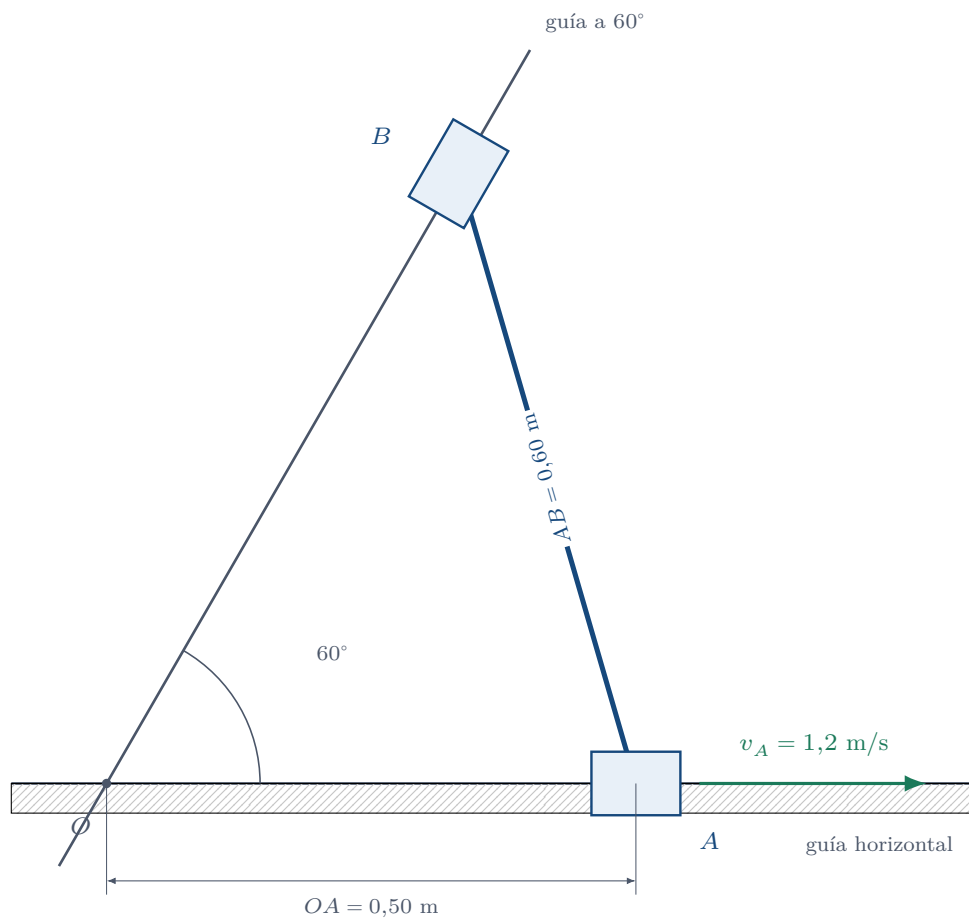


el extremo del cable está fijo al bloque y otros dos tramos lo sostienen:
tres tramos verticales $\Rightarrow s_A + 3s_B = L$

Punto 3 (40 minutos) — Cinemática de cuerpo rígido

Una barra rígida AB de $0,60\text{ m}$ tiene sus extremos dentro de dos collarines: el collarín A corre por una **guía horizontal** y el collarín B por una **guía inclinada** 60° ; ambas guías se cortan en O . En el instante mostrado A está a $0,50\text{ m}$ de O y se aleja con $v_A = 1,2\text{ m/s}$. Determine:

- La posición del collarín B sobre su guía.
- La velocidad angular ω_{AB} de la barra.
- La velocidad del collarín B (magnitud y sentido sobre su guía).
- Verifique el resultado localizando el centro instantáneo de rotación.



PARTE B — Solución completa

Punto 1 — Guía horizontal en coordenadas polares

Ruta de solución

Aquí **ya conoces** la velocidad y la aceleración absolutas del pasador: son horizontales y te las dan. Lo que no conoces son sus *componentes polares*. Entonces el problema se resuelve al revés de lo normal: **proyectas** el vector conocido sobre $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$, y de ahí despejas $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$.

PASO 1 Geometría: hallar r

El pasador está sobre la guía, a altura H constante. En polares esa altura es $r \sin \theta$:

$$r \sin \theta = H \implies r = \frac{H}{\sin \theta} = \frac{0,25}{\sin 50^\circ} = \frac{0,25}{0,76604} = 0,32635 \text{ m}$$

PASO 2 Proyectar la velocidad (que es horizontal) sobre $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$

Con el eje x horizontal, los versores polares valen

$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

y la velocidad del pasador es $\vec{v} = v_C \hat{i}$ (pura horizontal). Entonces:

$$v_r = \vec{v} \cdot \hat{e}_r = v_C \cos \theta = 0,40(0,64279) = 0,25712 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = \vec{v} \cdot \hat{e}_\theta = -v_C \sin \theta = -0,40(0,76604) = -0,30642 \text{ m/s}$$

PASO 3 Despejar $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$

Por definición $v_r = \dot{r}$ y $v_\theta = r\dot{\theta}$:

$$\dot{r} = 0,2571 \text{ m/s} \quad \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{-0,30642}{0,32635} = -0,9389 \text{ rad/s}$$

Respuesta: $r = 0,3264 \text{ m}$; $\dot{r} = 0,2571 \text{ m/s}$ (el pasador se *aleja* de O); $\dot{\theta} = -0,939 \text{ rad/s}$, es decir el brazo gira en sentido **horario**

¿Por qué el signo negativo tiene sentido?

El pasador se mueve hacia la derecha por una guía que está *arriba* de O . Si se aleja hacia la derecha, la línea OC se va acostando: el ángulo θ **disminuye**. Por eso $\dot{\theta} < 0$. Si te da positivo, revisa el signo del $-\sin \theta$.

PASO 4 Proyectar la aceleración (también horizontal)

Exactamente el mismo truco con $\vec{a} = a_C \hat{i}$:

$$a_r = a_C \cos \theta = 0,15(0,64279) = 0,09642 \text{ m/s}^2 \quad a_\theta = -a_C \sin \theta = -0,15(0,76604) = -0,11491 \text{ m/s}^2$$

PASO 5 Despejar $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$ de las fórmulas polares

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \implies \ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = 0,09642 + (0,32635)(0,88154) = 0,09642 + 0,28770 = 0,38412 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = \frac{-0,11491 - 2(0,25712)(-0,93890)}{0,32635}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-0,11491 + 0,48278}{0,32635} = \frac{0,36787}{0,32635} = 1,1272 \text{ rad/s}^2$$

Respuesta: $\dot{r} = 0,384 \text{ m/s}$; $\ddot{\theta} = 1,127 \text{ rad/s}^2$

PASO 6 El término de Coriolis

$$2\dot{r}\dot{\theta} = 2(0,25712)(-0,93890) = -0,48278 \text{ m/s}^2$$

Es **negativo y grande**: se opone a la componente a_θ . Físicamente aparece porque el pasador hace dos cosas a la vez: se aleja de O ($\dot{r} \neq 0$) mientras el brazo gira ($\dot{\theta} \neq 0$). Ninguna de las dos por separado lo produce; nace de la *combinación*.

Reconstruir el vector original

$$a_x = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta = 0,09642(0,64279) + 0,11491(0,76604) = 0,06198 + 0,08803 = 0,150 \checkmark$$

$$a_y = a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta = 0,09642(0,76604) - 0,11491(0,64279) = 0,07386 - 0,07386 = 0 \checkmark$$

Volvimos a la aceleración horizontal de $0,15 \text{ m/s}^2$. Todo cuadra.

Punto 2 — Aparejo de tres tramos

Ruta de solución

Movimiento dependiente es puro contar tramos y derivar. Con la restricción escrita, derivar una vez da velocidades y dos veces da aceleraciones. Lo único delicado son los **signos**: fija el datum (el techo) y mide todo hacia abajo positivo.

PASO 1 Escribir y derivar la restricción

Con s_A y s_B medidas desde el techo hacia abajo:

$$s_A + 3s_B = L \Rightarrow \dot{s}_A + 3\dot{s}_B = 0 \Rightarrow \ddot{s}_A + 3\ddot{s}_B = 0$$

PASO 2 Velocidad y aceleración de B

$$\dot{s}_B = -\frac{\dot{s}_A}{3} = -\frac{1,8}{3} = -0,60 \text{ m/s} \quad \ddot{s}_B = -\frac{\ddot{s}_A}{3} = -\frac{0,6}{3} = -0,20 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo, con el datum hacia abajo, significa que s_B *disminuye*: **B sube**.

Respuesta: $v_B = 0,60 \text{ m/s}$ hacia arriba; $a_B = 0,20 \text{ m/s}^2$ hacia arriba

PASO 3 Velocidad relativa

Tomando abajo como positivo, $\dot{s}_A = +1,8$ y $\dot{s}_B = -0,6$:

$$v_{A/B} = \dot{s}_A - \dot{s}_B = 1,8 - (-0,6) = 2,40 \text{ m/s hacia abajo}$$

PASO 4 Desplazamientos

Como la relación es lineal, vale igual para desplazamientos:

$$\Delta s_A + 3\Delta s_B = 0 \Rightarrow \Delta s_B = -\frac{1,2}{3} = -0,40 \text{ m}$$

B sube 0,40 m mientras A baja 1,2 m.

Respuesta: (a) $v_B = 0,60 \text{ m/s} \uparrow$, $a_B = 0,20 \text{ m/s}^2 \uparrow$ (b) $v_{A/B} = 2,40 \text{ m/s}$ hacia abajo (c) B sube 0,40 m

La ventaja mecánica

Tres tramos sostienen a B : el aparejo multiplica la fuerza por 3 y *divide* la velocidad por 3. Si B se moviera más rápido que A , el aparejo estaría regalando energía. $0,6 < 1,8$: correcto.

Punto 3 — Barra entre dos guías

Ruta de solución

Las dos guías te dan gratis las **direcciones** de las dos velocidades: $\vec{v}_A$ es horizontal y $\vec{v}_B$ va a lo largo de la guía de 60° . Con eso, la ecuación $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ tiene solo dos incógnitas escalares (ω_{AB} y la magnitud de $\vec{v}_B$) y dos componentes. Sale directo.

PASO 1 Ubicar el collarín B

B está sobre la guía de 60° , o sea $B = t(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = (0,5t; 0,86603t)$, y además $|AB| = 0,60$ con $A = (0,50; 0)$:

$$(0,5t - 0,5)^2 + (0,86603t)^2 = 0,36 \implies t^2 - 0,5t - 0,11 = 0$$

$$t = \frac{0,5 + \sqrt{0,25 + 0,44}}{2} = \frac{0,5 + 0,83066}{2} = 0,66533 \text{ m}$$

$$B = (0,33267; 0,57619) \text{ m} \quad \vec{r}_{B/A} = B - A = (-0,16733\hat{i} + 0,57619\hat{j}) \text{ m}$$

Respuesta: B está a 0,665 m de O sobre la guía inclinada

PASO 2 Plantear la ecuación de velocidades

$$\vec{v}_A = 1,2\hat{i} \text{ y } \vec{v}_B = v_B(\cos 60^\circ\hat{i} + \sin 60^\circ\hat{j}) = v_B(0,5\hat{i} + 0,86603\hat{j}).$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{AB}\hat{k} \times \vec{r}_{B/A}$$

Con $\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = -y\hat{i} + x\hat{j}$:

$$v_B(0,5\hat{i} + 0,86603\hat{j}) = 1,2\hat{i} + \omega_{AB}(-0,57619\hat{i} - 0,16733\hat{j})$$

PASO 3 Separar componentes y resolver

$$\hat{i}: 0,5 v_B = 1,2 - 0,57619 \omega_{AB}$$

$$\hat{j}: 0,86603 v_B = -0,16733 \omega_{AB}$$

De la segunda: $v_B = -0,19322 \omega_{AB}$. Reemplazando en la primera:

$$0,5(-0,19322 \omega_{AB}) = 1,2 - 0,57619 \omega_{AB} \implies 0,47958 \omega_{AB} = 1,2$$

$$\omega_{AB} = 2,5022 \text{ rad/s (antihoraria)} \quad v_B = -0,19322(2,5022) = -0,4835 \text{ m/s}$$

Respuesta: $\omega_{AB} = 2,50 \text{ rad/s antihoraria}$; $v_B = 0,484 \text{ m/s}$ dirigida **hacia** O (el signo menos: B baja por su guía)

PASO 4 Verificación con el centro instantáneo

La perpendicular a $\vec{v}_A$ por A es la **vertical** por A: $x = 0,50$. La perpendicular a $\vec{v}_B$ por B es la recta por B con pendiente $-\tan 30^\circ$ (perpendicular a la guía de 60°):

$$y - 0,57619 = -0,57735(x - 0,33267)$$

En $x = 0,50$: $y = 0,57619 - 0,57735(0,16733) = 0,57619 - 0,09661 = 0,47958$.

$$\text{CIR} = (0,500; 0,47958) \text{ m}$$

Distancias al CIR:

$$d_A = 0,47958 \text{ m} \quad d_B = \sqrt{(0,5 - 0,33267)^2 + (0,47958 - 0,57619)^2} = \sqrt{0,028 + 0,00933} = 0,19322 \text{ m}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{d_A} = \frac{1,2}{0,47958} = 2,5022 \text{ rad/s} \checkmark \quad v_B = \omega_{AB} d_B = 2,5022(0,19322) = 0,4835 \text{ m/s} \checkmark$$

Los dos caminos dan lo mismo

La ecuación vectorial y el CIR tienen que coincidir siempre, porque el CIR no es otra teoría: es la misma ecuación resuelta gráficamente. Si en el parcial te sobra tiempo, haz uno y verifica con el otro. Si no coinciden, casi siempre el error está en un signo de $\vec{r}_{B/A}$.

Respuestas rápidas del Simulacro 3

- P1** $r = 0,3264 \text{ m}$; $\dot{r} = 0,2571 \text{ m/s}$; $\dot{\theta} = -0,939 \text{ rad/s}$; $\ddot{r} = 0,384 \text{ m/s}^2$; $\ddot{\theta} = 1,127 \text{ rad/s}^2$; Coriolis = $-0,483 \text{ m/s}^2$.
- P2** $v_B = 0,60 \text{ m/s} \uparrow$; $a_B = 0,20 \text{ m/s}^2 \uparrow$; $v_{A/B} = 2,40 \text{ m/s} \downarrow$; B sube $0,40 \text{ m}$.
- P3** $OB = 0,665 \text{ m}$; $\omega_{AB} = 2,50 \text{ rad/s}$ antihoraria; $v_B = 0,484 \text{ m/s}$ hacia O ; CIR = $(0,500; 0,480) \text{ m}$.