

SIMULACRO 4

Leva en polares, dos autos con $n-t$ y corredera vertical

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • Tiempo sugerido: 1 h 45 min, cronómetro en mano

El punto 2 es el que más se pierde

Mezclar $n-t$ con movimiento relativo es el combo favorito del parcial. El error típico: calcular bien $\vec{a}_A$ y luego restar mal. Recuerda: $\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$, siempre en el mismo sistema de ejes (x este, y norte).

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá

Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Principios de Dinámica 2017271

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 4

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

Duración: 105 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

PARTE A — Examen

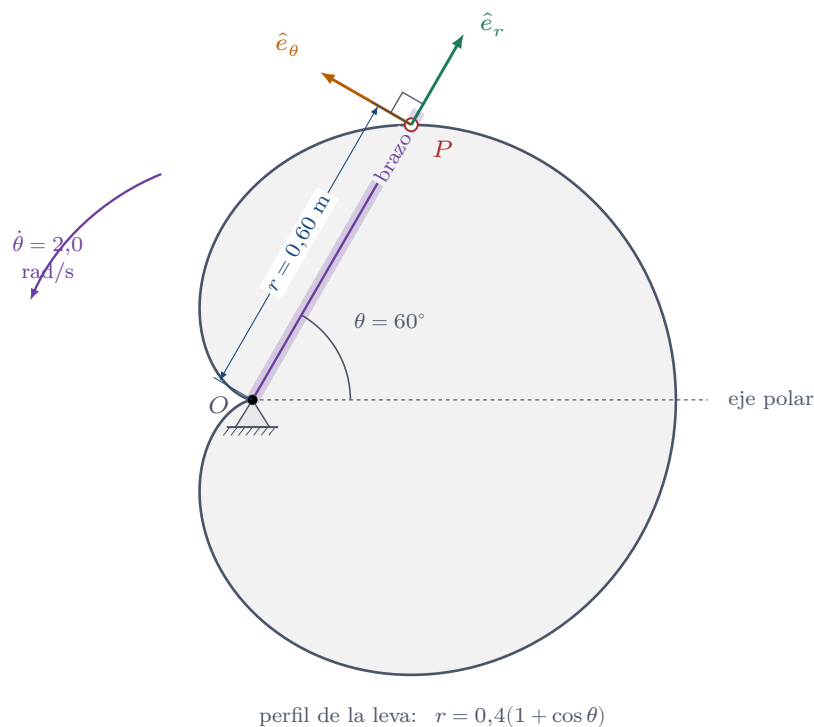
Punto 1 (30 minutos) — Coordenadas polares con leva

Un pasador P recorre el perfil de una leva cuya ecuación en polares es

$$r = 0,4(1 + \cos \theta) \text{ m}$$

arrastrado por un brazo que gira alrededor de O con $\dot{\theta} = 2,0 \text{ rad/s}$ **constante** en sentido antihorario. Para $\theta = 60^\circ$ determine:

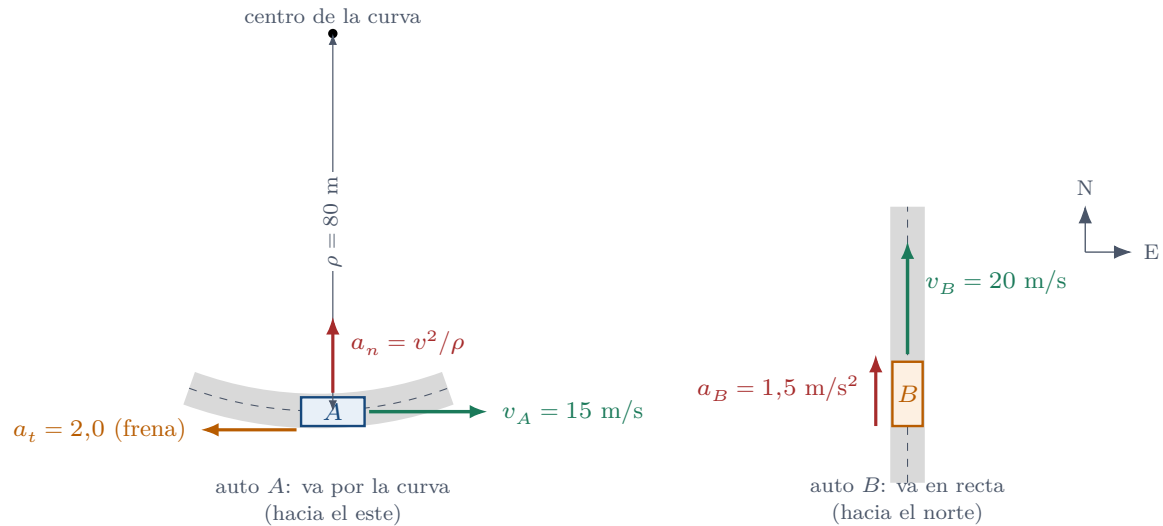
- r , $\dot{r}$ y $\ddot{r}$.
- Las componentes y la magnitud de la velocidad.
- Las componentes y la magnitud de la aceleración, indicando cuánto aporta Coriolis.



Punto 2 (35 minutos) — $n-t$ y movimiento relativo

El automóvil A recorre una curva de radio $\rho = 80$ m; en el instante mostrado se mueve **hacia el este** a 15 m/s y está **frenando** a razón de $2,0$ m/s². El automóvil B va por una recta **hacia el norte** a 20 m/s y está acelerando a $1,5$ m/s². Determine:

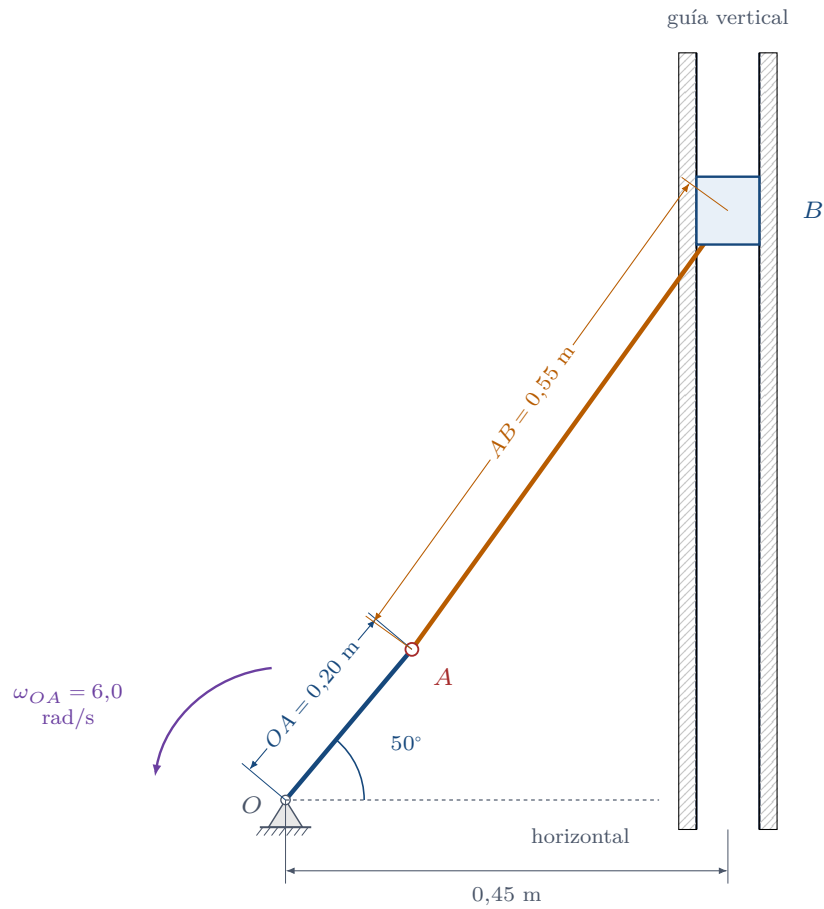
- Las componentes normal y tangencial de la aceleración de A , y su aceleración total.
- La velocidad de B vista desde A (magnitud y dirección).
- La aceleración de B vista desde A (magnitud y dirección).



Punto 3 (40 minutos) — Mecanismo con corredera vertical

La manivela OA mide 0,20 m y gira en sentido **antihorario** con velocidad angular **constante** $\omega_{OA} = 6,0$ rad/s. La biela AB mide 0,55 m y conecta con un bloque B que se desliza por una **guía vertical** situada a 0,45 m a la derecha de O . Para el instante en que OA forma 50° con la horizontal determine:

- $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$.
- ω_{AB} y la velocidad del bloque B .
- α_{AB} y la aceleración del bloque B .



PARTE B — Solución completa

Punto 1 — Leva en coordenadas polares

Ruta de solución

La leva te da r **como función de θ** , no del tiempo. Por eso cada derivada arrastra un $\dot{\theta}$ por regla de la cadena. Deriva $r(\theta)$ dos veces, evalúa y mete en las tres fórmulas polares. Nada más.

PASO 1 Evaluar r y derivar

$$r = 0,4(1 + \cos \theta) \implies \dot{r} = -0,4 \sin \theta \cdot \dot{\theta} \implies \ddot{r} = -0,4(\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta})$$

Como $\dot{\theta} = 2,0$ es constante, $\ddot{\theta} = 0$ y el segundo término desaparece. En $\theta = 60^\circ$ ($\sin = 0,86603$, $\cos = 0,5$):

$$\begin{aligned} r &= 0,4(1 + 0,5) = 0,600 \text{ m} \\ \dot{r} &= -0,4(0,86603)(2,0) = -0,69282 \text{ m/s} \\ \ddot{r} &= -0,4(0,5)(4,0) = -0,800 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Lee el signo

$\dot{r} < 0$ significa que el pasador se está **acercando** a O . Tiene sentido: en la cardioide, al pasar de 0° a 180° el radio se encoge de 0,8 m a cero.

PASO 2 Velocidad

$$\begin{aligned} v_r = \dot{r} &= -0,6928 \text{ m/s} & v_\theta = r\dot{\theta} &= (0,600)(2,0) = 1,2000 \text{ m/s} \\ |\vec{v}| &= \sqrt{0,6928^2 + 1,2000^2} = \sqrt{0,48 + 1,44} = 1,3856 \text{ m/s} \end{aligned}$$

PASO 3 Aceleración

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -0,800 - (0,600)(4,0) = -0,800 - 2,400 = -3,200 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0,69282)(2,0) = -2,7713 \text{ m/s}^2 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{3,200^2 + 2,7713^2} = \sqrt{10,24 + 7,68} = 4,2332 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: $r = 0,600 \text{ m}$; $\dot{r} = -0,693 \text{ m/s}$; $\ddot{r} = -0,800 \text{ m/s}^2$; $|\vec{v}| = 1,386 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 4,233 \text{ m/s}^2$; Coriolis $= -2,771 \text{ m/s}^2$

¿Cuánto pesa Coriolis?

Toda la componente a_θ es Coriolis, porque $\ddot{\theta} = 0$. Y vale 2,77 de un total de 4,23 m/s^2 : el 65% de la aceleración viene de ese término que tanta gente olvida.

Punto 2 — Dos autos: $n-t$ más relativo

Ruta de solución

Dos pasos bien separados. **Primero** describe cada auto en ejes fijos (x este, y norte); ahí es donde entra $n-t$ para el auto de la curva. **Después** resta. El único truco es acertar hacia dónde apunta a_n : siempre *hacia el centro de la curva*.

PASO 1 Aceleración del auto A en $n-t$

$$a_t = -2,0 \text{ m/s}^2 \text{ (frena: opuesta a } \vec{v}_A) \quad a_n = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{15^2}{80} = \frac{225}{80} = 2,8125 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_A| = \sqrt{2,0^2 + 2,8125^2} = \sqrt{4 + 7,9102} = 3,4511 \text{ m/s}^2$$

PASO 2 Pasar $\vec{a}_A$ a ejes fijos

$\vec{v}_A$ apunta al este, así que $\hat{e}_t = \hat{i}$. La curva dobla hacia el norte, o sea el centro está al norte: $\hat{e}_n = \hat{j}$.

$$\vec{a}_A = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n = -2,0 \hat{i} + 2,8125 \hat{j} \text{ m/s}^2$$

Y la velocidad: $\vec{v}_A = 15 \hat{i} \text{ m/s}$.

PASO 3 El auto B en los mismos ejes

Va en recta hacia el norte, así que no tiene componente normal:

$$\vec{v}_B = 20 \hat{j} \text{ m/s} \quad \vec{a}_B = 1,5 \hat{j} \text{ m/s}^2$$

PASO 4 Velocidad relativa

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = 20 \hat{j} - 15 \hat{i} = (-15 \hat{i} + 20 \hat{j}) \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_{B/A}| = \sqrt{225 + 400} = 25,0 \text{ m/s}$$

$$\text{dirección} = \arctan \frac{20}{15} = 53,13^\circ \text{ al norte del oeste}$$

PASO 5 Aceleración relativa

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = 1,5 \hat{j} - (-2,0 \hat{i} + 2,8125 \hat{j}) = (2,0 \hat{i} - 1,3125 \hat{j}) \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_{B/A}| = \sqrt{4 + 1,7227} = 2,392 \text{ m/s}^2 \quad \text{dirección} = \arctan \frac{1,3125}{2,0} = 33,3^\circ \text{ al sur del este}$$

Respuesta: (a) $a_t = 2,0$, $a_n = 2,8125$, $|\vec{a}_A| = 3,451 \text{ m/s}^2$ (b) $|\vec{v}_{B/A}| = 25,0 \text{ m/s}$ a $53,1^\circ$ al norte del oeste (c) $|\vec{a}_{B/A}| = 2,392 \text{ m/s}^2$ a $33,3^\circ$ al sur del este

El error que cuesta el punto

Mucha gente escribe $\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$. El subíndice se lee “ B respecto a A ”: lo que *ves tú (que vas en A)* cuando miras a B . Siempre es **el de arriba menos el de abajo**.

Punto 3 — Mecanismo con corredera vertical

Ruta de solución

Idéntico a la biela-manivela clásica, con un solo cambio: el bloque corre por una guía **vertical**, así que $\vec{v}_B$ y $\vec{a}_B$ son verticales (componente $\hat{i}$ nula). Ese cero es justo la ecuación que te despeja ω_{AB} y α_{AB} .

PASO 1 Coordenadas

$$A = (0,20 \cos 50^\circ; 0,20 \sin 50^\circ) = (0,12856; 0,15321) \text{ m}$$

B está en $x = 0,45$, y por $|AB| = 0,55$:

$$y_B = 0,15321 + \sqrt{0,55^2 - (0,45 - 0,12856)^2} = 0,15321 + 0,44629 = 0,59950 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (0,32144\hat{i} + 0,44629\hat{j}) \text{ m}$$

PASO 2 Velocidad y aceleración de A

A gira alrededor de O con $\omega_{OA} = 6,0 \text{ rad/s}$ antihoraria ($\vec{\omega}_{OA} = 6\hat{k}$) y $\alpha_{OA} = 0$:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{OA} \times \vec{r}_{A/O} = 6\hat{k} \times (0,12856\hat{i} + 0,15321\hat{j}) = (-0,91925\hat{i} + 0,77135\hat{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_A = -\omega_{OA}^2 \vec{r}_{A/O} = -36(0,12856\hat{i} + 0,15321\hat{j}) = (-4,6281\hat{i} - 5,5155\hat{j}) \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}_A| = 1,200 \text{ m/s}$ (perpendicular a OA); $|\vec{a}_A| = 7,200 \text{ m/s}^2$ (dirigida de A hacia O)

PASO 3 Velocidad angular de la biela

$\vec{v}_B = v_B \hat{j}$ (guía vertical):

$$v_B \hat{j} = (-0,91925\hat{i} + 0,77135\hat{j}) + \omega_{AB} \hat{k} \times (0,32144\hat{i} + 0,44629\hat{j})$$

$$v_B \hat{j} = (-0,91925\hat{i} + 0,77135\hat{j}) + \omega_{AB}(-0,44629\hat{i} + 0,32144\hat{j})$$

$$\hat{i}: 0 = -0,91925 - 0,44629\omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = -2,0598 \text{ rad/s}$$

$$\hat{j}: v_B = 0,77135 + (-2,0598)(0,32144) = 0,77135 - 0,66210 = 0,10925 \text{ m/s}$$

Respuesta: $\omega_{AB} = 2,06 \text{ rad/s}$ horaria; $v_B = 0,109 \text{ m/s}$ hacia arriba

PASO 4 Aceleración angular de la biela

$$a_B \hat{j} = \vec{a}_A + \alpha_{AB} \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$$

con $\omega_{AB}^2 = 4,2428$:

$$a_B \hat{j} = (-4,6281\hat{i} - 5,5155\hat{j}) + \alpha_{AB}(-0,44629\hat{i} + 0,32144\hat{j}) - 4,2428(0,32144\hat{i} + 0,44629\hat{j})$$

$$\hat{i}: 0 = -4,6281 - 0,44629\alpha_{AB} - 1,3638 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{AB} = -13,426 \text{ rad/s}^2$$

$$\begin{aligned} \hat{j}: a_B &= -5,5155 + (-13,426)(0,32144) - 4,2428(0,44629) \\ &= -5,5155 - 4,3157 - 1,8935 = -11,725 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: $\alpha_{AB} = 13,43 \text{ rad/s}^2$ horaria; $a_B = 11,73 \text{ m/s}^2$ hacia **abajo**

El bloque casi se detiene

Fíjate: $v_B = 0,109 \text{ m/s}$ (casi cero) pero $a_B = -11,7 \text{ m/s}^2$ (grandísima). Eso significa que B está justo **cambiando de sentido**: venía subiendo, se frena y empieza a bajar. Es normal y es exactamente lo que pasa cerca de los puntos muertos de un mecanismo. Velocidad pequeña nunca implica aceleración pequeña.

Respuestas rápidas del Simulacro 4

- P1** $r = 0,600 \text{ m}$; $\dot{r} = -0,693 \text{ m/s}$; $\ddot{r} = -0,800 \text{ m/s}^2$; $|\vec{v}| = 1,386 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 4,233 \text{ m/s}^2$; Coriolis $= -2,771 \text{ m/s}^2$.
- P2** $a_n = 2,8125$, $a_t = -2,0$, $|\vec{a}_A| = 3,451 \text{ m/s}^2$; $\vec{v}_{B/A} = (-15; 20)$, $|\cdot| = 25,0 \text{ m/s}$; $\vec{a}_{B/A} = (2,0; -1,3125)$, $|\cdot| = 2,392 \text{ m/s}^2$.
- P3** $|\vec{v}_A| = 1,20 \text{ m/s}$; $|\vec{a}_A| = 7,20 \text{ m/s}^2$; $\omega_{AB} = -2,06 \text{ rad/s}$; $v_B = +0,109 \text{ m/s}$; $\alpha_{AB} = -13,43 \text{ rad/s}^2$; $a_B = -11,73 \text{ m/s}^2$.