

SIMULACRO 5

Polares con $r(t)$ y $\theta(t)$, rectilíneo con $a = f(v)$ y biela-manivela con CIR

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • Tiempo sugerido: 1 h 45 min, cronómetro en mano

Lo que se cobra en este simulacro

El Punto 2 es el clásico que separa: cuando la aceleración depende de la **velocidad**, no puedes usar $v = v_0 + at$. Tienes que separar variables. Si no te sale, ese tema vale la mitad del Parcial 1 en algunas versiones.

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá

Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Principios de Dinámica 2017271

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 5

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

Duración: 105 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

PARTE A — Examen

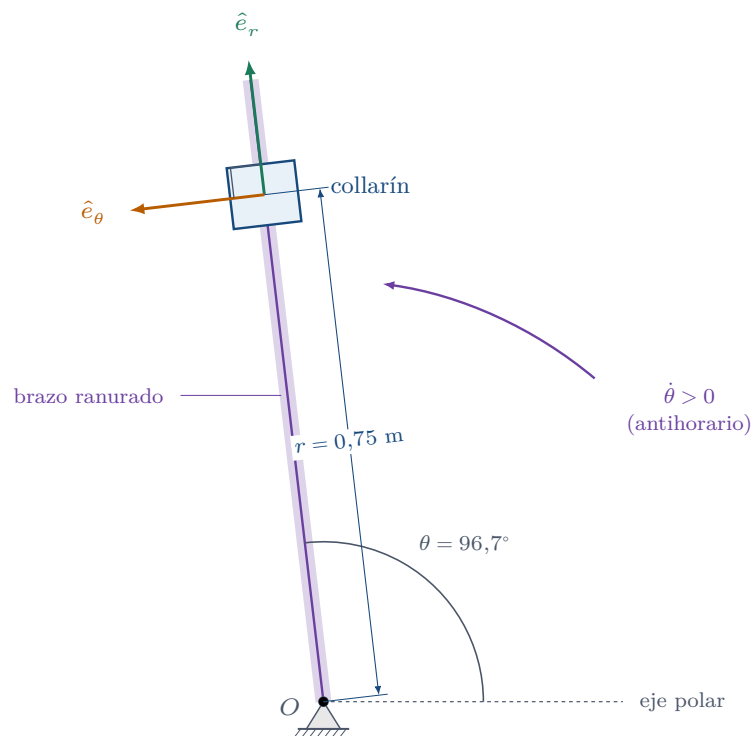
Punto 1 (30 minutos) — Polares con el tiempo como variable

Un collarín se desliza por la ranura de un brazo que gira alrededor de O . El movimiento está dado directamente en función del tiempo:

$$r = 0,3 + 0,2t^2 \text{ (m)} \quad \theta = 0,5t^3 \text{ (rad)}$$

Para $t = 1,5$ s determine:

- r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ , $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.
- Las componentes y la magnitud de la velocidad.
- Las componentes y la magnitud de la aceleración, señalando el término de Coriolis.



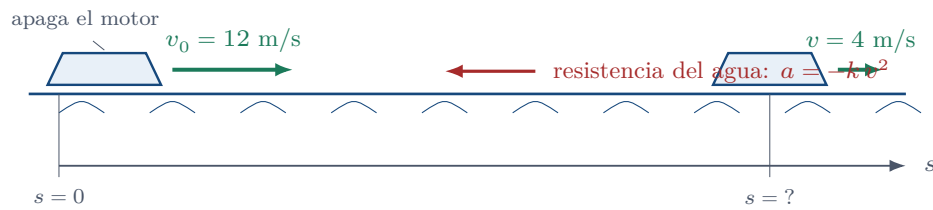
Punto 2 (30 minutos) — Rectilíneo con $a = f(v)$

Una lancha navega a $v_0 = 12$ m/s cuando apaga el motor. A partir de ese instante la resistencia del agua le produce una desaceleración proporcional al cuadrado de la rapidez:

$$a = -k v^2, \quad k = 0,05 \text{ m}^{-1}$$

Determine:

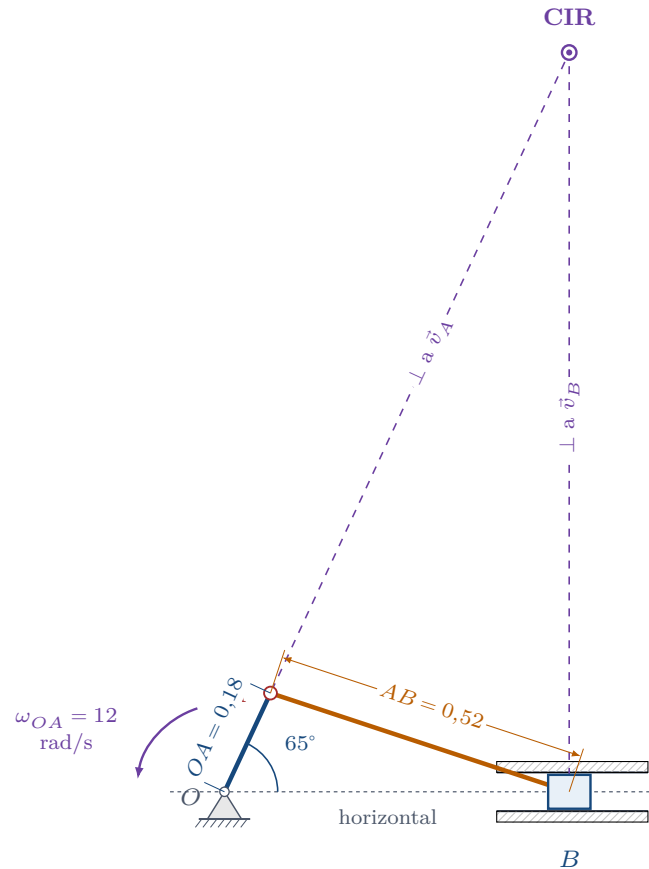
- (a) La distancia que recorre hasta que su rapidez baja a 4 m/s.
- (b) El tiempo que tarda en llegar a esa rapidez.
- (c) La desaceleración al comienzo y al final de ese tramo, y comente qué significa.



Punto 3 (45 minutos) — Biela-manivela, por los dos caminos

La manivela OA mide 0,18 m y gira en sentido **antihorario** con velocidad angular **constante** $\omega_{OA} = 12 \text{ rad/s}$. La biela AB mide 0,52 m y el pistón B se desliza sobre la horizontal que pasa por O . Para $\theta = 65^\circ$ determine:

- ω_{AB} y v_B usando la **ecuación vectorial**.
- Los mismos resultados usando el **centro instantáneo de rotación**, y compare.
- α_{AB} y a_B .



PARTE B — Solución completa

Punto 1 — Polares con el tiempo

Ruta de solución

Este es el más directo de todos los de polares: te dan $r(t)$ y $\theta(t)$ explícitas. Derivas respecto al tiempo (sin regla de la cadena rara), evalúas en $t = 1,5$ y metes en las tres fórmulas. El único riesgo es equivocarse en aritmética, así que ordena los seis números antes de sustituir.

PASO 1 Derivar y evaluar en $t = 1,5$ s

$$\begin{aligned}
 r &= 0,3 + 0,2t^2 & \Rightarrow & r = 0,3 + 0,2(2,25) = 0,750 \text{ m} \\
 \dot{r} &= 0,4t & \Rightarrow & \dot{r} = 0,4(1,5) = 0,600 \text{ m/s} \\
 \ddot{r} &= 0,4 & \Rightarrow & \ddot{r} = 0,400 \text{ m/s}^2 \\
 \theta &= 0,5t^3 & \Rightarrow & \theta = 0,5(3,375) = 1,6875 \text{ rad} = 96,69^\circ \\
 \dot{\theta} &= 1,5t^2 & \Rightarrow & \dot{\theta} = 1,5(2,25) = 3,375 \text{ rad/s} \\
 \ddot{\theta} &= 3t & \Rightarrow & \ddot{\theta} = 3(1,5) = 4,500 \text{ rad/s}^2
 \end{aligned}$$

Ordena antes de sustituir

Escribe los seis números en una columna antes de tocar las fórmulas. Casi todos los errores de este tipo de punto son de *transcripción*, no de concepto.

PASO 2 Velocidad

$$\begin{aligned}
 v_r &= \dot{r} = 0,600 \text{ m/s} & v_\theta &= r\dot{\theta} = (0,750)(3,375) = 2,5313 \text{ m/s} \\
 |\vec{v}| &= \sqrt{0,600^2 + 2,5313^2} = \sqrt{0,36 + 6,407} = 2,6014 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

PASO 3 Aceleración

$$\begin{aligned}
 a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0,400 - (0,750)(11,3906) = 0,400 - 8,5430 = -8,1430 \text{ m/s}^2 \\
 a_\theta &= r\ddot{\theta} + \underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{Coriolis}} = (0,750)(4,500) + 2(0,600)(3,375) \\
 &= 3,375 + 4,050 = 7,425 \text{ m/s}^2 \\
 |\vec{a}| &= \sqrt{8,1430^2 + 7,425^2} = \sqrt{66,31 + 55,13} = 11,020 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 2,601 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 11,02 \text{ m/s}^2$; Coriolis = $4,050 \text{ m/s}^2$ (más de la mitad de a_θ)

¿Por qué a_r sale negativa si el collarín se aleja?

Porque $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ tiene dos partes que pelean: $\ddot{r} = +0,4$ (se aleja cada vez más rápido) y $-r\dot{\theta}^2 = -8,54$ (el término centrípeto, que siempre jala hacia O). Gana el centrípeto por goleada. Esto es normal cuando $\dot{\theta}$ es grande: girar rápido domina sobre alejarse.

Punto 2 — Aceleración que depende de la velocidad

Ruta de solución

Regla de oro: mira **de qué depende** a .

- Si depende del tiempo $\rightarrow$ usa $a = dv/dt$.
- Si depende de la posición $\rightarrow$ usa $a ds = v dv$.
- Si depende de la velocidad $\rightarrow$ *puedes usar las dos*, y eliges según lo que te pidan: para **distancia** usa $a ds = v dv$; para **tiempo** usa $a = dv/dt$.

Aquí te piden las dos cosas, así que haces las dos integrales.

PASO 1 Distancia: usar $a ds = v dv$

$$-kv^2 ds = v dv \Rightarrow -k ds = \frac{dv}{v}$$

Integrando de $(0, v_0)$ a (s, v) :

$$-k s = \ln \frac{v}{v_0} \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{k} \ln \frac{v_0}{v}}$$

$$s = \frac{1}{0,05} \ln \frac{12}{4} = 20 \ln 3 = 20(1,09861) = 21,97 \text{ m}$$

PASO 2 Tiempo: usar $a = dv/dt$

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -k dt \Rightarrow -\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = -k t$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k t \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right)}$$

$$t = \frac{1}{0,05} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = 20 (0,25 - 0,08333) = 20(0,16667) = 3,333 \text{ s}$$

PASO 3 Desaceleración al principio y al final

$$a_0 = -0,05(12)^2 = -7,20 \text{ m/s}^2 \quad a_f = -0,05(4)^2 = -0,80 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $s = 21,97 \text{ m}$ (b) $t = 3,33 \text{ s}$ (c) $a_0 = -7,20 \text{ m/s}^2$, $a_f = -0,80 \text{ m/s}^2$: la lancha frena **nueve veces más fuerte** al principio que al final

Lo que dice el resultado

Como $a \propto v^2$, al bajar la rapidez a la tercera parte la desaceleración cae a la novena. Por eso la lancha nunca se detiene del todo: matemáticamente $v \rightarrow 0$ solo cuando $t \rightarrow \infty$. Si alguien te da una respuesta del tipo “se detiene en X segundos”, está usando mal las fórmulas de a constante.

El error que mata este punto

Usar $v = v_0 + at$ con $a = -7,2$ daría $t = 1,11 \text{ s}$, que es **tres veces menos** que la respuesta correcta. Esas fórmulas solo valen si a es constante, y aquí a cambia todo el tiempo.

Punto 3 — Biela-manivela por los dos caminos

Ruta de solución

Primero el camino seguro (ecuación vectorial), después el atajo (CIR). Que coincidan es tu verificación gratis. Ojo: el CIR sirve **solo** para velocidades; para la aceleración no hay atajo, toca la ecuación vectorial.

PASO 1 Coordenadas

$$A = (0,18 \cos 65^\circ; 0,18 \sin 65^\circ) = (0,07607; 0,16314) \text{ m}$$

$$B_x = 0,07607 + \sqrt{0,52^2 - 0,16314^2} = 0,07607 + 0,49375 = 0,56983 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (0,49375 \hat{i} - 0,16314 \hat{j}) \text{ m}$$

PASO 2 Velocidad de A

$$\vec{v}_A = 12\hat{k} \times (0,07607\hat{i} + 0,16314\hat{j}) = (-1,9576\hat{i} + 0,9129\hat{j}) \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_A| = \omega_{OA} \cdot OA = 12(0,18) = 2,160 \text{ m/s } \checkmark$$

PASO 3 Camino A: ecuación vectorial

$\vec{v}_B = v_B \hat{i}$ porque el pistón solo se mueve horizontal:

$$v_B \hat{i} = (-1,9576\hat{i} + 0,9129\hat{j}) + \omega_{AB} \hat{k} \times (0,49375\hat{i} - 0,16314\hat{j})$$

$$v_B \hat{i} = (-1,9576\hat{i} + 0,9129\hat{j}) + \omega_{AB}(0,16314\hat{i} + 0,49375\hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = 0,9129 + 0,49375 \omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = -1,8488 \text{ rad/s}$$

$$\hat{i}: v_B = -1,9576 + (-1,8488)(0,16314) = -1,9576 - 0,3016 = -2,2592 \text{ m/s}$$

Respuesta: $\omega_{AB} = 1,849 \text{ rad/s}$ horaria; $v_B = 2,259 \text{ m/s}$ hacia la izquierda

PASO 4 Camino B: centro instantáneo de rotación

$\vec{v}_A \perp OA$, así que la perpendicular a $\vec{v}_A$ por A es la **prolongación de OA**. $\vec{v}_B$ es horizontal, así que la perpendicular a $\vec{v}_B$ por B es la **vertical** $x = 0,56983$. Se cortan en:

$$\text{CIR} = (0,56983; 0,56983 \tan 65^\circ) = (0,56983; 1,22199) \text{ m}$$

Distancias:

$$d_A = |\text{CIR} - A| = \sqrt{0,49376^2 + 1,05885^2} = 1,16831 \text{ m} \quad d_B = 1,22199 \text{ m}$$

$$\omega_{AB} = \frac{|\vec{v}_A|}{d_A} = \frac{2,160}{1,16831} = 1,8488 \text{ rad/s } \checkmark$$

$$v_B = \omega_{AB} d_B = 1,8488(1,22199) = 2,2592 \text{ m/s } \checkmark$$

Idénticos. El sentido se lee del dibujo: si el CIR está *arriba* y A va hacia arriba-izquierda, la biela gira en sentido horario.

PASO 5 Aceleraciones

$$\vec{a}_A = -\omega_{OA}^2 \vec{r}_{A/O} = -144(0,07607\hat{i} + 0,16314\hat{j}) = (-10,954\hat{i} - 23,489\hat{j}) \text{ m/s}^2$$

Con $\omega_{AB}^2 = 3,4181$ y $\vec{a}_B = a_B \hat{i}$:

$$a_B \hat{i} = (-10,954 \hat{i} - 23,489 \hat{j}) + \alpha_{AB}(0,16314 \hat{i} + 0,49375 \hat{j}) - 3,4181(0,49375 \hat{i} - 0,16314 \hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = -23,489 + 0,49375 \alpha_{AB} + 0,5576 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{AB} = 46,45 \text{ rad/s}^2$$

$$\begin{aligned} \hat{i}: a_B &= -10,954 + 46,45(0,16314) - 3,4181(0,49375) \\ &= -10,954 + 7,577 - 1,688 = -5,065 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: $\alpha_{AB} = 46,45 \text{ rad/s}^2$ antihoraria; $a_B = 5,065 \text{ m/s}^2$ hacia la izquierda

No uses el CIR para aceleraciones

Es tentador escribir $a_B = \alpha_{AB} d_B$ y ahorrarse el paso 5. **Está mal.** El CIR es un punto distinto en cada instante; el punto de la biela que ahora tiene velocidad cero *no* tiene aceleración cero. Comprueba: $46,45(1,222) = 56,8$, muy lejos de los 5,07 correctos.

Respuestas rápidas del Simulacro 5

P1 $r = 0,750$; $\dot{r} = 0,600$; $\ddot{r} = 0,400$; $\dot{\theta} = 3,375$; $\ddot{\theta} = 4,500$; $|\vec{v}| = 2,601 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 11,02 \text{ m/s}^2$; Coriolis = $4,050 \text{ m/s}^2$.

P2 $s = 21,97 \text{ m}$; $t = 3,33 \text{ s}$; $a_0 = -7,20$ y $a_f = -0,80 \text{ m/s}^2$.

P3 $|\vec{v}_A| = 2,160 \text{ m/s}$; $\omega_{AB} = -1,849 \text{ rad/s}$; $v_B = -2,259 \text{ m/s}$; CIR = $(0,570; 1,222) \text{ m}$; $\alpha_{AB} = +46,45 \text{ rad/s}^2$; $a_B = -5,065 \text{ m/s}^2$.