

SIMULACRO 6

El más difícil: eslabón ranurado con Coriolis, lancha en el río y cuadrilátero articulado

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • **Tiempo sugerido:** 2 horas, cronómetro en mano

Este es el simulacro de cierre

Es deliberadamente más duro que el parcial real. Si sacas 3,5 aquí, en el parcial estás sobrado. El Punto 3 (cuadrilátero articulado) casi nunca cae en Parcial 1, pero si lo dominas, la biela-manivela te va a parecer un juego.

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá

Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Principios de Dinámica 2017271

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 6

Nombre: _____ **Código:** _____ **Nota:** _____

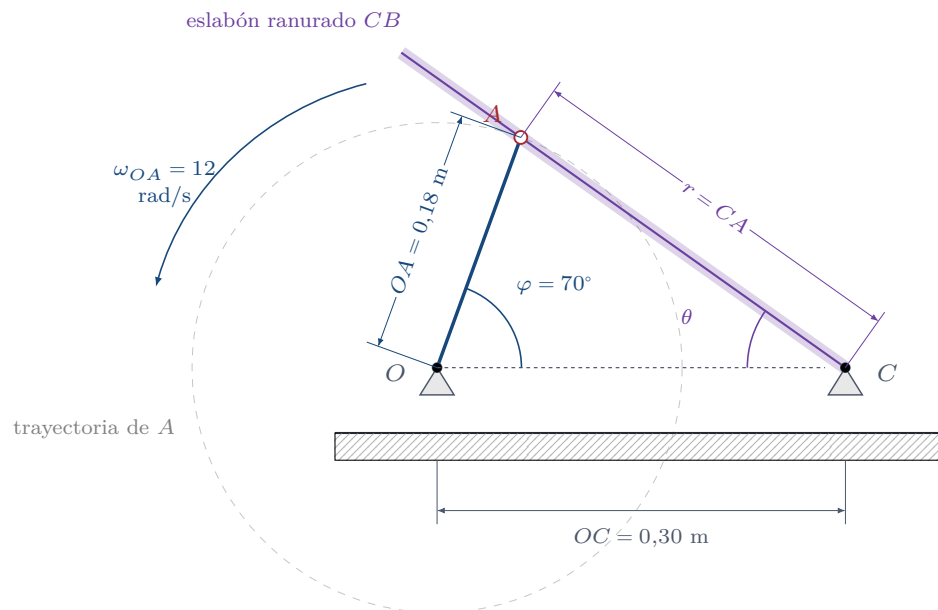
Duración: 120 minutos • **Tres puntos de igual valor** • Escribe unidades en todo resultado.

PARTE A — Examen

Punto 1 (40 minutos) — Eslabón ranurado (Coriolis)

La manivela OA mide $0,18\text{ m}$ y gira en sentido **antihorario** con velocidad angular **constante** $\omega_{OA} = 12\text{ rad/s}$. El pasador A se desliza dentro de la ranura del eslabón que pivota en C , con $OC = 0,30\text{ m}$. Para el instante en que $\varphi = 70^\circ$ determine:

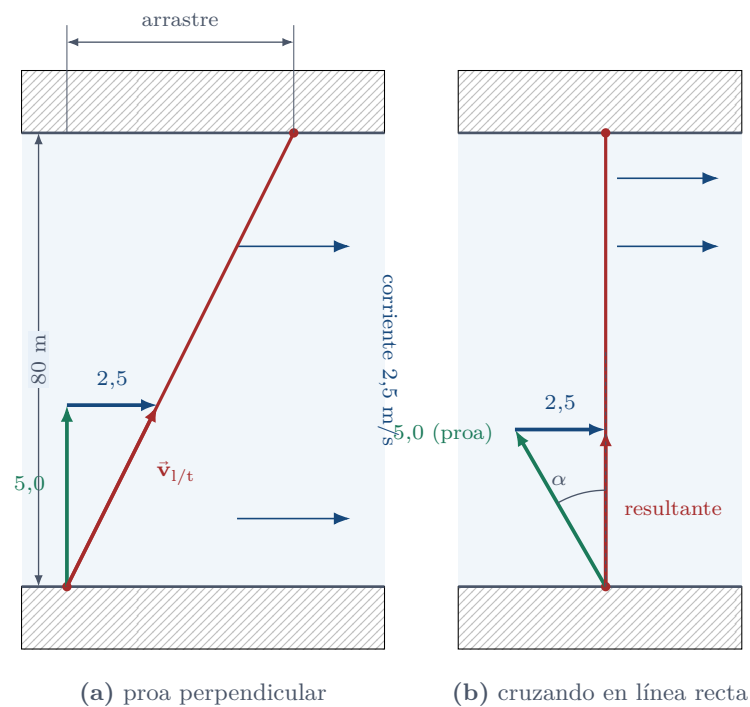
- La distancia $r = CA$ y la velocidad angular $\dot{\theta}$ del eslabón ranurado.
- La velocidad de deslizamiento $\dot{r}$ del pasador dentro de la ranura.
- La aceleración angular $\ddot{\theta}$ del eslabón, la aceleración de deslizamiento $\ddot{r}$, y el término de Coriolis.



Punto 2 (30 minutos) — Movimiento relativo

Un río de 80 m de ancho baja con una corriente uniforme de 2,5 m/s. Una lancha puede navegar a 5,0 m/s **respecto al agua**. Determine:

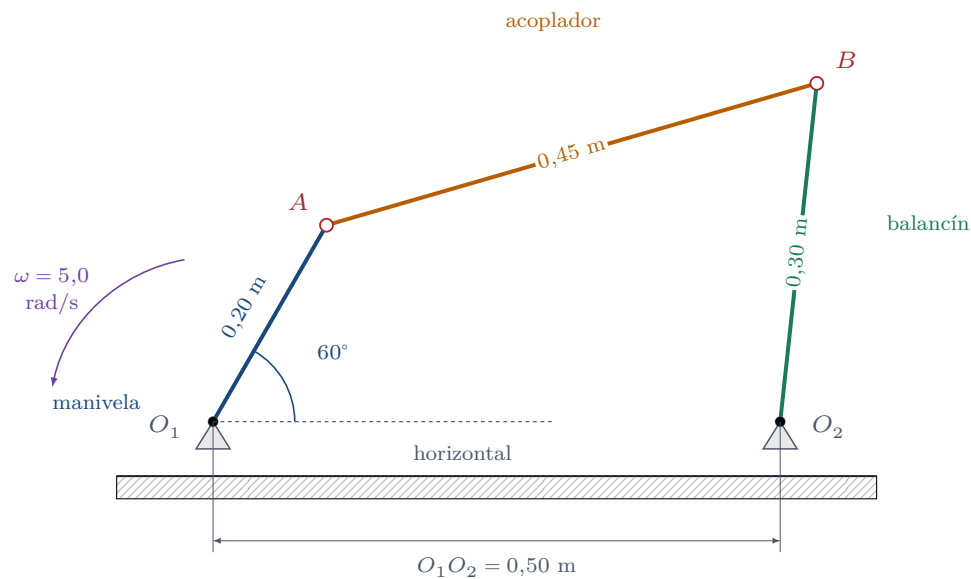
- Si el piloto apunta la proa **perpendicular** a la orilla: la velocidad de la lancha respecto a tierra (magnitud y dirección), el tiempo de cruce y cuánto la arrastra la corriente río abajo.
- El ángulo **aguas arriba** al que debe apuntar la proa para cruzar en línea recta, y el tiempo de cruce en ese caso.
- Explique por qué el segundo cruce tarda más.



Punto 3 (50 minutos) — Cuadrilátero articulado

En el mecanismo de cuatro barras de la figura, $O_1 = (0; 0)$ y $O_2 = (0,50; 0)$ son pivotes fijos. La manivela O_1A mide 0,20 m y gira en sentido **antihorario** con $\omega = 5,0$ rad/s **constante**. El acoplador AB mide 0,45 m y el balancín O_2B mide 0,30 m. Para el instante en que O_1A forma 60° con la horizontal determine:

- (a) Las coordenadas del punto B .
- (b) ω_{AB} y ω_{O_2B} .
- (c) α_{AB} y α_{O_2B} .



PARTE B — Solución completa

Punto 1 — Eslabón ranurado

Ruta de solución

El pasador A pertenece a **dos** cuerpos: a la manivela (y por eso conocemos todo su movimiento absoluto) y a la ranura del eslabón. La estrategia: calcular $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$ desde la manivela, y luego **proyectarlas** sobre $\hat{e}_r$ (a lo largo de la ranura) y $\hat{e}_\theta$ (perpendicular a ella), medidas *desde* C .

PASO 1 Geometría

$$A = (0,18 \cos 70^\circ; 0,18 \sin 70^\circ) = (0,06156; 0,16914) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{A/C} = A - C = (-0,23844; 0,16914) \text{ m} \quad r = |\vec{r}_{A/C}| = 0,29234 \text{ m}$$

Los versores de la ranura (desde C hacia A):

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}_{A/C}}{r} = (-0,81532; 0,57837) \quad \hat{e}_\theta = (-0,57837; -0,81532)$$

El eslabón forma $\theta = 35,35^\circ$ con la línea CO .

PASO 2 Velocidad absoluta del pasador (viene de la manivela)

$$\vec{v}_A = \omega_{OA} \hat{k} \times \vec{r}_{A/O} = 12 \hat{k} \times (0,06156 \hat{i} + 0,16914 \hat{j}) = (-2,0297 \hat{i} + 0,7388 \hat{j}) \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_A| = 12(0,18) = 2,160 \text{ m/s} \checkmark$$

PASO 3 Proyectar sobre la ranura

$$\dot{r} = \vec{v}_A \cdot \hat{e}_r = (-2,0297)(-0,81532) + (0,7388)(0,57837) = 1,6549 + 0,4272 = 2,0829 \text{ m/s}$$

$$r\dot{\theta} = \vec{v}_A \cdot \hat{e}_\theta = (-2,0297)(-0,57837) + (0,7388)(-0,81532) = 1,1739 - 0,6023 = 0,5716 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = \frac{0,5716}{0,29234} = 1,956 \text{ rad/s}$$

Respuesta: $r = 0,2923 \text{ m}$; $\dot{r} = 2,083 \text{ m/s}$ (el pasador se *aleja* de C); $\dot{\theta} = 1,956 \text{ rad/s}$ antihoraria

PASO 4 Aceleración absoluta del pasador

Como ω_{OA} es constante, $\vec{a}_A$ es puramente centrípeta:

$$\vec{a}_A = -\omega_{OA}^2 \vec{r}_{A/O} = -144(0,06156 \hat{i} + 0,16914 \hat{j}) = (-8,8646 \hat{i} - 24,3569 \hat{j}) \text{ m/s}^2$$

PASO 5 Proyectar la aceleración y despejar

$$a_r = \vec{a}_A \cdot \hat{e}_r = 7,2275 - 14,0873 = -6,8598 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = \vec{a}_A \cdot \hat{e}_\theta = 5,1270 + 19,8585 = 24,9855 \text{ m/s}^2$$

Ahora se usan las fórmulas polares al revés:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \implies \ddot{r} = -6,8598 + (0,29234)(3,8263) = -6,8598 + 1,1187 = -5,741 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{24,9855 - 2(2,0829)(1,9561)}{0,29234} = \frac{24,9855 - 8,1488}{0,29234} = 57,59 \text{ rad/s}^2$$

Respuesta: $\ddot{r} = -5,74 \text{ m/s}^2$; $\ddot{\theta} = 57,6 \text{ rad/s}^2$; término de Coriolis $2\dot{r}\dot{\theta} = 8,149 \text{ m/s}^2$

¿57 rad/s² no es demasiado?

No. El eslabón ranurado está cerca de su posición extrema, donde tiene que frenar y devolverse; ahí las aceleraciones angulares se disparan. Compara: la manivela gira a 12 rad/s constantes, pero el eslabón acelera brutalmente. Esa es justamente la gracia de este mecanismo (se usa en cepilladoras para el retorno rápido).

El paso que se salta todo el mundo

Muchos calculan a_r y escriben $\ddot{r} = a_r$. **Falso.** $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$: hay que *devolver* el término centrípeto. Igual con a_θ : hay que restar Coriolis antes de dividir por r .

Punto 2 — La lancha y el río

Ruta de solución

Todo sale de una sola ecuación:

$$\vec{v}_{\text{lancha/tierra}} = \vec{v}_{\text{lancha/agua}} + \vec{v}_{\text{agua/tierra}}$$

Fíjate cómo se cancelan los subíndices del medio. Pon x río abajo y y cruzando.

PASO 1 Caso (a): proa perpendicular

$$\begin{aligned} \vec{v}_{l/a} &= 5,0 \hat{j} & \vec{v}_{a/t} &= 2,5 \hat{i} & \vec{v}_{l/t} &= (2,5 \hat{i} + 5,0 \hat{j}) \text{ m/s} \\ |\vec{v}_{l/t}| &= \sqrt{2,5^2 + 5,0^2} = 5,590 \text{ m/s} & \beta &= \arctan \frac{2,5}{5,0} = 26,57^\circ \text{ río abajo} \end{aligned}$$

PASO 2 Tiempo y arrastre en el caso (a)

Lo que cruza el río es **solo** la componente y , y esa vale 5,0 m/s:

$$t = \frac{80}{5,0} = 16,0 \text{ s} \quad \text{arrastre} = v_x t = 2,5(16,0) = 40,0 \text{ m}$$

Por qué la corriente no cambia el tiempo

En el caso (a) la corriente empuja *paralela* a la orilla: no ayuda ni estorba al cruce. El tiempo sale igual que si el agua estuviera quieta. Lo único que hace es correrle 40 m río abajo.

PASO 3 Caso (b): cruzar en línea recta

Para que la trayectoria sea recta, la componente x total debe ser cero. Si la proa apunta α aguas arriba:

$$-5,0 \sin \alpha + 2,5 = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2,5}{5,0} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30,0^\circ$$

La velocidad útil de cruce queda:

$$v_y = 5,0 \cos 30^\circ = 4,330 \text{ m/s} \quad t = \frac{80}{4,330} = 18,48 \text{ s}$$

Respuesta: (a) $|\vec{v}| = 5,59 \text{ m/s}$ a $26,6^\circ$ río abajo, $t = 16,0 \text{ s}$, arrastre = $40,0 \text{ m}$ (b) $\alpha = 30,0^\circ$ aguas arriba, $t = 18,5 \text{ s}$

PASO 4 Por qué (b) tarda más

Porque en (b) la lancha **gasta** parte de sus $5,0 \text{ m/s}$ en pelear contra la corriente: $2,5 \text{ m/s}$ se van en cancelar el arrastre y solo quedan $4,33 \text{ m/s}$ para cruzar. En (a) los $5,0 \text{ m/s}$ completos van al cruce. Cruzar derecho cuesta tiempo; cruzar rápido cuesta distancia.

Siempre se cumple

$4,330 = \sqrt{5,0^2 - 2,5^2}$: es el cateto del triángulo rectángulo. Si la corriente igualara o superara la velocidad de la lancha ($2,5 \geq 5,0$), sería **imposible** cruzar en línea recta.

Punto 3 — Cuadrilátero articulado

Ruta de solución

Es la ecuación vectorial de siempre, pero con **dos** incógnitas angulares en vez de una. La clave: B pertenece al mismo tiempo al acoplador AB y al balancín O_2B . Escribe $\vec{v}_B$ por los dos caminos e iguala. Quedan dos ecuaciones (una por componente) con dos incógnitas (ω_{AB} y ω_{O_2B}).

PASO 1 Ubicar B

B debe cumplir a la vez $|B - A| = 0,45$ y $|B - O_2| = 0,30$, con $A = (0,10; 0,17321)$. Resolviendo el sistema (intersección de dos circunferencias):

$$B = (0,53228; 0,29826) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (0,43228\hat{i} + 0,12505\hat{j}) \quad \vec{r}_{B/O_2} = (0,03228\hat{i} + 0,29826\hat{j})$$

Cómo resolverlo a mano en el parcial

Resta las dos ecuaciones de circunferencia: los términos x^2 y y^2 se cancelan y queda una **recta** (el eje radical). Despejas y en función de x , lo metes en una de las dos circunferencias y resuelves la cuadrática. Escoges la raíz que corresponda al montaje del dibujo.

PASO 2 Velocidad de A

$$\vec{v}_A = 5\hat{k} \times (0,10\hat{i} + 0,17321\hat{j}) = (-0,86603\hat{i} + 0,50000\hat{j}) \text{ m/s}$$

PASO 3 Igualar los dos caminos hacia $\vec{v}_B$

$$\underbrace{\vec{v}_A + \omega_{AB}\hat{k} \times \vec{r}_{B/A}}_{\text{por el acoplador}} = \underbrace{\omega_{O_2B}\hat{k} \times \vec{r}_{B/O_2}}_{\text{por el balancín}}$$

$$(-0,86603\hat{i} + 0,50000\hat{j}) + \omega_{AB}(-0,12505\hat{i} + 0,43228\hat{j}) = \omega_{O_2B}(-0,29826\hat{i} + 0,03228\hat{j})$$

$$\hat{i}: -0,86603 - 0,12505\omega_{AB} = -0,29826\omega_{O_2B}$$

$$\hat{j}: 0,50000 + 0,43228\omega_{AB} = 0,03228\omega_{O_2B}$$

Resolviendo el sistema 2×2 :

$$\omega_{AB} = -0,9703 \text{ rad/s} \quad \omega_{O_2B} = +2,4968 \text{ rad/s}$$

Respuesta: $\omega_{AB} = 0,970 \text{ rad/s horaria}$; $\omega_{O_2B} = 2,497 \text{ rad/s antihoraria}$

PASO 4 Aceleraciones: mismo esquema

Con $\alpha_{O_1A} = 0$, $\vec{a}_A = -25(0,10\hat{i} + 0,17321\hat{j}) = (-2,5000\hat{i} - 4,3301\hat{j}) \text{ m/s}^2$.

$$\vec{a}_A + \alpha_{AB}\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2\vec{r}_{B/A} = \alpha_{O_2B}\hat{k} \times \vec{r}_{B/O_2} - \omega_{O_2B}^2\vec{r}_{B/O_2}$$

Con $\omega_{AB}^2 = 0,9415$ y $\omega_{O_2B}^2 = 6,2340$, y pasando los términos conocidos al lado derecho, queda otro sistema 2×2 con las mismas dos columnas de antes:

$$\alpha_{AB} = +6,881 \text{ rad/s}^2 \quad \alpha_{O_2B} = +11,957 \text{ rad/s}^2$$

Respuesta: $\alpha_{AB} = 6,88 \text{ rad/s}^2$ antihoraria; $\alpha_{O_2B} = 11,96 \text{ rad/s}^2$ antihoraria

La matriz es la misma

Fíjate en algo que ahorra muchísimo tiempo: el sistema de velocidades y el de aceleraciones tienen **exactamente la misma matriz de coeficientes**. Solo cambia el lado derecho. Si en el parcial ya invertiste esa matriz para las velocidades, reutilízala.

La receta del cuadrilátero, en cuatro líneas

1. Ubica B intersecando las dos circunferencias.
2. $\vec{v}_A$ de la manivela (es rotación pura alrededor de O_1).
3. $\vec{v}_A + \omega_{AB}\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} = \omega_{O_2B}\hat{k} \times \vec{r}_{B/O_2} \rightarrow$ sistema 2×2 .
4. Repite con la ecuación de aceleración; misma matriz, distinto lado derecho.

Respuestas rápidas del Simulacro 6

- P1** $r = 0,2923 \text{ m}$; $\dot{r} = 2,083 \text{ m/s}$; $\dot{\theta} = 1,956 \text{ rad/s}$; $\ddot{r} = -5,74 \text{ m/s}^2$; $\ddot{\theta} = 57,6 \text{ rad/s}^2$; Coriolis = $8,149 \text{ m/s}^2$.
- P2** (a) $5,59 \text{ m/s}$ a $26,6^\circ$, $t = 16,0 \text{ s}$, arrastre $40,0 \text{ m}$. (b) $\alpha = 30,0^\circ$, $t = 18,5 \text{ s}$.
- P3** $B = (0,5323; 0,2983) \text{ m}$; $\omega_{AB} = -0,970 \text{ rad/s}$; $\omega_{O_2B} = +2,497 \text{ rad/s}$; $\alpha_{AB} = +6,881 \text{ rad/s}^2$; $\alpha_{O_2B} = +11,957 \text{ rad/s}^2$.