

TALLER 0

Caja de herramientas: lo mínimo que debes tener automatizado

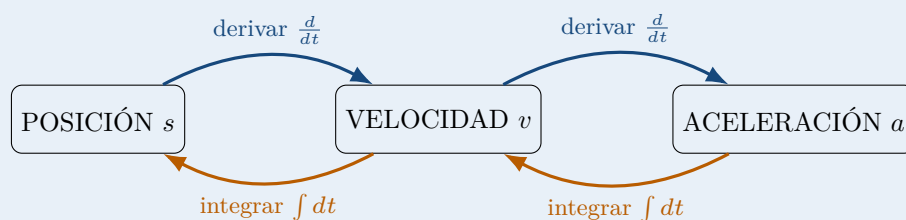
Semana del programa: Previo a la Semana 1 • Tiempo sugerido: 1 hora

Cómo usar este taller

Este taller **no** es dinámica todavía. Son las cinco herramientas que vas a usar en *todos* los problemas del Parcial 1. Si estas cinco cosas te salen sin pensar, el parcial deja de ser difícil y pasa a ser largo. Léelo una vez, haz los ejercicios, y vuelve a esta hoja cada vez que te trabes en los talleres 1 a 5.

1. La idea que lo gobierna todo

La escalera posición → velocidad → aceleración



Bajar la escalera (de s a a) es **derivar**. **Subir** la escalera (de a a s) es **integrar** y aparecen constantes que se hallan con las condiciones iniciales.

Herramienta 1: las tres ecuaciones que nunca cambian

$$v = \frac{ds}{dt} \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \boxed{a ds = v dv}$$

La tercera sale de combinar las dos primeras y es la que salva cuando **no aparece el tiempo** en el problema.

Qué usar según lo que te den

Te dan	Quieres	Usa
$s(t)$	v, a	derivar dos veces
$a = \text{constante}$	v, s	$v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$; $v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$
$a = f(t)$	$v(t), s(t)$	$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt$, luego otra vez
$a = f(v)$	t o s	$\int \frac{dv}{f(v)} = \int dt$ ó $\int \frac{v dv}{f(v)} = \int ds$
$a = f(s)$	$v(s)$	$\int v dv = \int f(s) ds$

Cuidado

Las fórmulas $v = v_0 + at$ y $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ **solo sirven si a es constante**. Si en el enunciado a depende de t , de v o de s , usarlas es un cero seguro. Esa es la trampa favorita del Parcial 1.

2. Herramienta 2: derivadas e integrales que sí vas a usar**Derivadas**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t^n) &= n t^{n-1} \\ \frac{d}{dt}(\sin \theta) &= \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}(\cos \theta) &= -\sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}(\tan \theta) &= \sec^2 \theta \cdot \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}(uv) &= \dot{u}v + u\dot{v} \\ \frac{d}{dt}\sqrt{u} &= \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}\end{aligned}$$

Integrales

$$\begin{aligned}\int t^n dt &= \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ \int \frac{dv}{v} &= \ln v \\ \int \frac{dv}{v^2} &= -\frac{1}{v} \\ \int \sin \theta d\theta &= -\cos \theta \\ \int v dv &= \frac{v^2}{2}\end{aligned}$$

El error #1 de todo el curso

Cuando derivas algo que depende de θ y θ depende del tiempo, **siempre** aparece $\dot{\theta}$ multiplicando (regla de la cadena):

$$\frac{d}{dt}(0,4 \cos \theta) = -0,4 \sin \theta \cdot \dot{\theta} \quad (\text{no es } -0,4 \sin \theta)$$

Olvidar ese $\dot{\theta}$ es lo que más puntos cuesta en los parciales de coordenadas polares.

3. Herramienta 3: vectores en 2D sin miedo

Todo vector se escribe con dos números (componentes) o con magnitud y ángulo:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}, \quad |\vec{\mathbf{A}}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$$A_x = |\vec{\mathbf{A}}| \cos \theta, \quad A_y = |\vec{\mathbf{A}}| \sin \theta$$

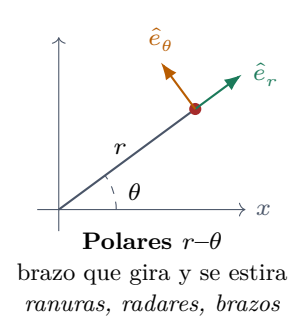
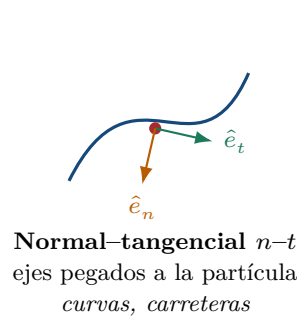
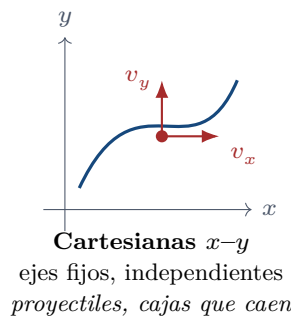
Producto cruz: el que usarás mil veces en cuerpo rígido

En movimiento plano, $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ (sale de la hoja si es antihorario). Entonces:

$$\omega \hat{k} \times (x \hat{i} + y \hat{j}) = \omega(-y \hat{i} + x \hat{j})$$

Regla práctica: intercambias x e y , le pones menos al que quedó primero, y multiplicas por ω . Eso es todo. El resultado siempre es **perpendicular** al vector original.

4. Herramienta 4: los tres sistemas de coordenadas



Las tres fórmulas maestras (apréndelas de memoria)

Cartesianas: $\vec{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j}, \quad \vec{a} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j}$

Normal-tangencial: $\vec{v} = v \hat{e}_t, \quad \vec{a} = \underbrace{\dot{v}}_{a_t} \hat{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{a_n} \hat{e}_n$

Polares: $\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta$

Cómo leer la fórmula polar en español

- $\dot{r}$: qué tan rápido te alejas del centro. $r\dot{\theta}$: qué tan rápido giras alrededor.
- $\ddot{r}$: qué tan rápido cambia tu rapidez de alejamiento.
- $-r\dot{\theta}^2$: el término **centrípeto** (siempre apunta al centro, por eso el menos).
- $r\ddot{\theta}$: el giro se está acelerando.
- $2\dot{r}\dot{\theta}$: el término de **Coriolis**. Aparece *solo* cuando te mueves hacia afuera **y** giras al mismo tiempo. Es el que todo el mundo olvida.

5. Herramienta 5: el radio de curvatura ρ

Si te dan la trayectoria como $y = f(x)$:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}$$

Si el camino es un círculo de radio R , entonces $\rho = R$ y ya. Si el camino es recto, $\rho = \infty$ y por eso $a_n = 0$.

6. Ejercicios de calentamiento

Resuélvelos en 30 minutos. Las respuestas están al final de la página.

- C1.** Si $s = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (m), halle $v(t)$ y $a(t)$, y evalúe en $t = 2$ s.
- C2.** Si $\theta = 3t^2$ rad, halle $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ en $t = 1$ s.
- C3.** Si $r = 0,5 \cos \theta$ y $\dot{\theta} = 4$ rad/s constante, halle $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ cuando $\theta = 60^\circ$. (*Ojo con la regla de la cadena.*)
- C4.** Calcule $\omega \hat{k} \times \vec{r}$ si $\omega = 5$ rad/s y $\vec{r} = (0,3\hat{i} - 0,4\hat{j})$ m.
- C5.** Un vector tiene $A_x = -6$ y $A_y = 8$. Halle magnitud y ángulo respecto al eje x .
- C6.** La trayectoria es $y = 0,25x^2$. Halle ρ en $x = 2$ m.
- C7.** Si $a = 6t - 4$ (m/s²), $v_0 = 2$ m/s y $s_0 = 0$, halle $v(t)$ y $s(t)$.
- C8.** Si $a = -0,5v$ (m/s²) y $v_0 = 10$ m/s, halle $v(t)$. (*Separate variables.*)

Respuestas

- C1.** $v = 6t^2 - 10t$, $a = 12t - 10$; en $t = 2$: $v = 4$ m/s, $a = 14$ m/s². **C2.** $\dot{\theta} = 6t = 6$ rad/s, $\ddot{\theta} = 6$ rad/s².
C3. $\dot{r} = -0,5 \sin \theta \dot{\theta} = -1,732$ m/s; $\ddot{r} = -0,5 \cos \theta \dot{\theta}^2 = -4,0$ m/s². **C4.** $5\hat{k} \times (0,3\hat{i} - 0,4\hat{j}) = 2,0\hat{i} + 1,5\hat{j}$ (m/s).
C5. $|\vec{A}| = 10$, $\theta = 126,87^\circ$. **C6.** $dy/dx = 0,5x = 1$; $d^2y/dx^2 = 0,5$; $\rho = 2^{3/2}/0,5 = 5,657$ m.
C7. $v = 3t^2 - 4t + 2$; $s = t^3 - 2t^2 + 2t$. **C8.** $v = 10e^{-0,5t}$ m/s.