

TALLER 1

Cinemática de partícula: movimiento rectilíneo y coordenadas x - y

Semana del programa: Semana 1, Clase 1 • Tiempo sugerido: 2 horas

Cómo trabajar este taller

Primero intenta la **Parte A** solo, con el formulario al lado y sin mirar la Parte B. Dale 20 minutos por problema; si te trabas, lee *solo* la caja “Ruta de solución” del problema en la Parte B y vuelve a intentar. Solo al final compara todo el desarrollo. Lo que aprende no es leer la solución, es haber intentado antes de leerla.

1. Lo que necesitas de este tema

Las cuatro situaciones del movimiento rectilíneo

Caso	Cómo lo reconoces	Qué haces
$s(t)$ dada	te dan la posición como función del tiempo	derivas: $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$
$a = f(t)$	la aceleración depende del <i>tiempo</i>	$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt$
$a = f(v)$	la aceleración depende de la <i>velocidad</i> (resistencia del aire, agua)	$\int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = \int dt$ ó $\int \frac{v dv}{f(v)} = \int ds$
$a = f(s)$	la aceleración depende de la <i>posición</i> (resortes, imanes)	$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds$

Movimiento curvilíneo en x - y : el principio de independencia

El movimiento horizontal y el vertical **no se enteran uno del otro**. Se resuelven por separado y solo comparten una cosa: **el tiempo**.

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}, \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$$

Proyectil ($a_x = 0$, $a_y = -g = -9,81 \text{ m/s}^2$):

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_y = v_{0y} - gt$$

con $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ y $v_{0y} = v_0 \sin \theta$.

Distancia recorrida vs. desplazamiento

Desplazamiento = $s_{\text{final}} - s_{\text{inicial}}$ (puede ser negativo o cero).

Distancia recorrida = suma de todos los tramos *en valor absoluto*. Para calcularla hay que encontrar primero dónde $v = 0$, porque ahí el cuerpo se devuelve. Si no buscas esos puntos, la distancia te va a dar mal.

PARTE A — Enunciados

Problema 1.1 – Posición dada, tipo Hibbeler 12-9

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por

$$s = t^3 - 9t^2 + 15t + 5 \quad (\text{m, con } t \text{ en segundos})$$

Determine:

- (a) Las expresiones de $v(t)$ y $a(t)$.
- (b) Los instantes en que la partícula se detiene.
- (c) El desplazamiento y la **distancia total recorrida** entre $t = 0$ y $t = 6$ s.

Problema 1.2 – Aceleración función del tiempo

Una partícula parte del reposo en el origen con una aceleración $a = (2t - 6) \text{ m/s}^2$.

- (a) Halle $v(t)$ y $s(t)$.
- (b) ¿En qué instante la partícula vuelve a tener velocidad cero?
- (c) ¿Cuál es su posición y qué distancia recorrió hasta ese instante?

Problema 1.3 – Aceleración función de la velocidad

Una lancha se mueve en línea recta a 8,0 m/s cuando apaga el motor. El agua le produce una desaceleración $a = -0,6 v^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$, con v en m/s. Determine:

- (a) El tiempo que tarda en bajar a 2,0 m/s.
- (b) La distancia que recorre en ese lapso.
- (c) Su velocidad 1 segundo después de apagar el motor.

Problema 1.4 – Aceleración función de la posición

Un bloque unido a un resorte se mueve sobre una superficie lisa con $a = -100 s \text{ (m/s}^2\text{)}$, donde s se mide en metros desde la posición sin deformar del resorte. Cuando $s = 0$ la velocidad del bloque es 5,0 m/s.

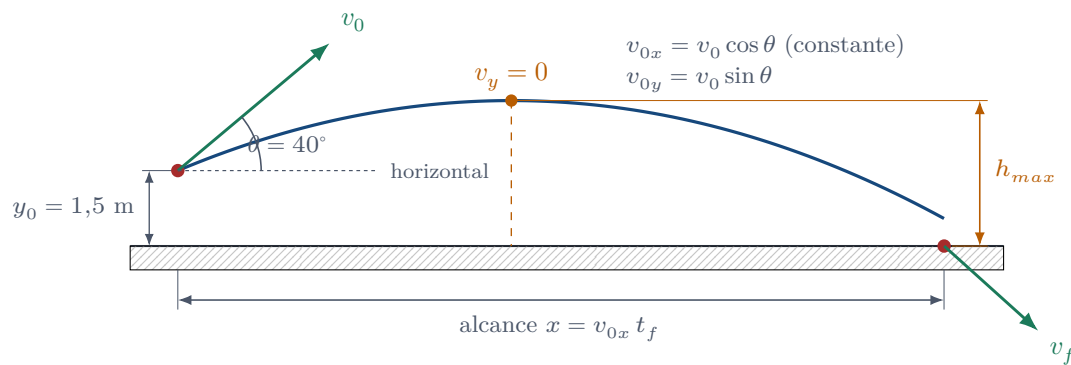
- (a) Halle la expresión $v(s)$.
- (b) Halle la velocidad cuando $s = 0,20$ m.
- (c) ¿Cuál es el desplazamiento máximo que alcanza el bloque?

Problema 1.5 – proyectil, tipo Beer 11.97

Una pelota se lanza desde una altura de 1,5 m con una rapidez inicial de 25 m/s formando 40° con la horizontal. Determine:

- (a) El tiempo total de vuelo hasta tocar el suelo.
- (b) El alcance horizontal.
- (c) La altura máxima medida desde el suelo.
- (d) La magnitud y dirección de la velocidad justo antes del impacto.

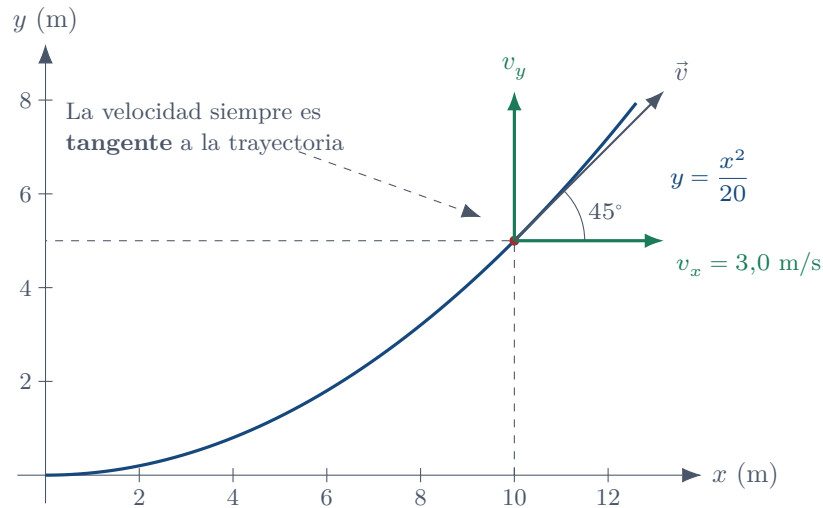
Desprecie la resistencia del aire, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



Problema 1.6 – Trayectoria dada $y = f(x)$

Una partícula recorre la trayectoria $y = \frac{x^2}{20}$ (con x, y en metros), y la componente horizontal de su velocidad se mantiene constante en $v_x = 3,0$ m/s. Para el instante en que $x = 10$ m determine:

- Las componentes v_y y a_y .
- La magnitud y dirección del vector velocidad.
- La magnitud del vector aceleración.



Guarde este resultado: en el Taller 2 va a resolver el mismo problema con coordenadas $n-t$ y deben coincidir.

PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 1.1

Ruta de solución

Te dan $s(t)$, así que **derivas dos veces** y listo. La única parte con truco es la (c): para la distancia hay que partir el recorrido en los instantes donde $v = 0$, porque ahí la partícula cambia de sentido.

PASO 1 Derivar para obtener velocidad y aceleración

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 15 \quad (\text{m/s}) \qquad a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18 \quad (\text{m/s}^2)$$

PASO 2 Encontrar dónde se detiene ($v = 0$)

$$3t^2 - 18t + 15 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 5) = 0$$

$$t_1 = 1 \text{ s} \qquad t_2 = 5 \text{ s}$$

En esos dos instantes la partícula se para y se devuelve.

PASO 3 Evaluar la posición en los cuatro puntos clave

$$s(0) = 0 - 0 + 0 + 5 = 5 \text{ m}$$

$$s(1) = 1 - 9 + 15 + 5 = 12 \text{ m}$$

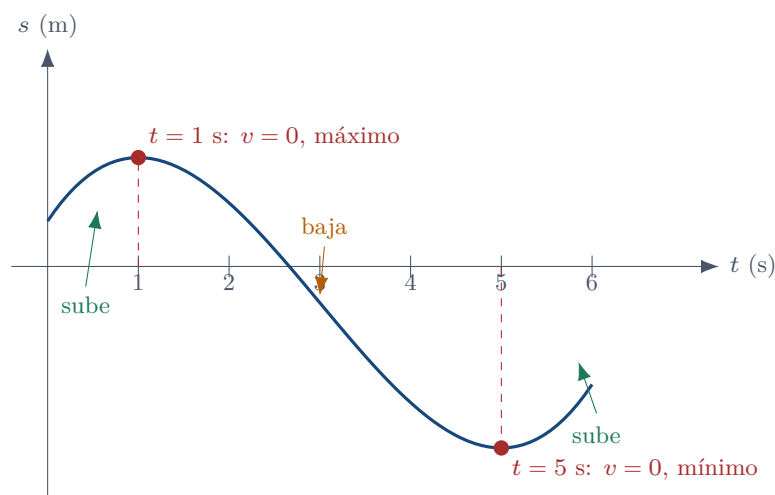
$$s(5) = 125 - 225 + 75 + 5 = -20 \text{ m}$$

$$s(6) = 216 - 324 + 90 + 5 = -13 \text{ m}$$

PASO 4 Desplazamiento

$$\Delta s = s(6) - s(0) = -13 - 5 = -18 \text{ m}$$

El signo negativo dice que terminó 18 m a la izquierda de donde arrancó.



PASO 5 Distancia recorrida: sumar tramo por tramo en valor absoluto

$$\text{Tramo } 0 \rightarrow 1 : |12 - 5| = 7 \text{ m} \quad (\text{va hacia } +)$$

$$\text{Tramo } 1 \rightarrow 5 : |-20 - 12| = 32 \text{ m} \quad (\text{se devolvió})$$

$$\text{Tramo } 5 \rightarrow 6 : |-13 - (-20)| = 7 \text{ m} \quad (\text{vuelve hacia } +)$$

$$s_T = 7 + 32 + 7 = 46 \text{ m}$$

Respuesta: (a) $v = 3t^2 - 18t + 15$, $a = 6t - 18$. (b) $t = 1 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$. (c) Desplazamiento = -18 m ; distancia recorrida = 46 m .

Chequeo de sentido común

La distancia (46 m) tiene que ser **mayor** que el valor absoluto del desplazamiento (18 m) siempre que la partícula se haya devuelto alguna vez. Aquí se devolvió dos veces, así que $46 > 18$ tiene todo el sentido. Si te hubiera dado 18 m de distancia, sabrías que olvidaste partir el recorrido.

Problema 1.2**Ruta de solución**

a depende del tiempo $\Rightarrow$ se integra respecto a t . Una integral te lleva de a a v , otra de v a s . Las constantes salen de “parte del reposo en el origen” ($v_0 = 0$, $s_0 = 0$).

PASO 1 De a a v

$$\int_0^v dv = \int_0^t (2t - 6) dt \Rightarrow v = t^2 - 6t \quad (\text{m/s})$$

PASO 2 De v a s

$$\int_0^s ds = \int_0^t (t^2 - 6t) dt \Rightarrow s = \frac{t^3}{3} - 3t^2 \quad (\text{m})$$

PASO 3 Cuándo vuelve a estar en reposo

$$t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t(t - 6) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ s} \quad (t = 0 \text{ es el arranque})$$

PASO 4 Posición y distancia

$$s(6) = \frac{216}{3} - 3(36) = 72 - 108 = -36 \text{ m}$$

Entre $t = 0$ y $t = 6 \text{ s}$ la velocidad $v = t(t - 6)$ es **negativa todo el tiempo** (porque $0 < t < 6$), así que la partícula nunca se devolvió: la distancia recorrida es simplemente $|-36| = 36 \text{ m}$.

Respuesta: (a) $v = t^2 - 6t$, $s = \frac{t^3}{3} - 3t^2$. (b) $t = 6 \text{ s}$. (c) $s = -36 \text{ m}$ y recorrió 36 m .

Cuidado

Fíjate que la aceleración *sí* cambia de signo en $t = 3$ s (ahí $a = 0$), pero la *velocidad* no. Que la aceleración cambie de signo no significa que el cuerpo se devuelva: solo significa que deja de frenar y empieza a acelerar. El cuerpo se devuelve cuando v cambia de signo, no a .

Problema 1.3**Ruta de solución**

a depende de v . Entonces:

- si quieres **tiempo**, usa $a = \frac{dv}{dt}$ y separas variables;
- si quieres **distancia**, usa $a ds = v dv$, porque ahí no aparece el tiempo.

PASO 1 (a) Tiempo: usar $a = dv/dt$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -0,6 v^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -0,6 dt \\ \int_8^2 v^{-2} dv &= \int_0^t -0,6 dt \Rightarrow \left[-\frac{1}{v} \right]_8^2 = -0,6 t \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} &= -0,6 t \Rightarrow -0,375 = -0,6 t \Rightarrow t = 0,625 \text{ s}\end{aligned}$$

PASO 2 (b) Distancia: usar $a ds = v dv$

$$\begin{aligned}-0,6 v^2 ds &= v dv \Rightarrow ds = -\frac{dv}{0,6 v} \\ \int_0^x ds &= -\frac{1}{0,6} \int_8^2 \frac{dv}{v} \Rightarrow x = \frac{1}{0,6} \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \frac{\ln 4}{0,6} = 2,31 \text{ m}\end{aligned}$$

PASO 3 (c) Velocidad al cabo de 1 s

De la integral del Paso 1 en forma general:

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -0,6 t \Rightarrow v = \frac{v_0}{1 + 0,6 v_0 t} = \frac{8}{1 + 0,6(8)(1)} = 1,379 \text{ m/s}$$

Respuesta: (a) $t = 0,625$ s. (b) $x = 2,31$ m. (c) $v(1 \text{ s}) = 1,38$ m/s.

Chequeo de sentido común

La velocidad nunca llega a cero matemáticamente (la fórmula $v = v_0/(1 + kv_0 t)$ solo se acerca a cero cuando $t \rightarrow \infty$). Eso es físicamente correcto: si la resistencia es proporcional a v^2 , cuando la lancha va muy lento casi no hay frenado. Si te dio un tiempo finito para que $v = 0$, revisa la integral.

Problema 1.4

Ruta de solución

a depende de s y **no hay tiempo en el enunciado**. Bandera roja para usar $a ds = v dv$.

PASO 1 Aplicar $v dv = a ds$

$$\int_5^v v dv = \int_0^s (-100 s) ds$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{5^2}{2} = -50 s^2 \Rightarrow v^2 = 25 - 100 s^2$$

$$v = \sqrt{25 - 100 s^2} \text{ (m/s)}$$

PASO 2 Velocidad en $s = 0,20 \text{ m}$

$$v = \sqrt{25 - 100(0,04)} = \sqrt{21} = 4,583 \text{ m/s}$$

PASO 3 Desplazamiento máximo (donde se detiene)

El bloque llega lo más lejos posible cuando $v = 0$:

$$25 - 100 s^2 = 0 \Rightarrow s_{max} = 0,50 \text{ m}$$

Respuesta: (a) $v^2 = 25 - 100s^2$. (b) $v = 4,58 \text{ m/s}$. (c) $s_{max} = 0,50 \text{ m}$.

Lo que acabas de resolver es un movimiento armónico simple

La ecuación $a = -100 s$ tiene la forma $a = -\omega^2 s$ con $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Ese es exactamente el tema de **Vibraciones** (semana 13). La amplitud es $A = v_0/\omega = 5/10 = 0,5 \text{ m}$, que es justo el s_{max} que hallaste. Ya viste el final de la película.

Problema 1.5

Ruta de solución

Proyectil = dos problemas independientes que comparten el tiempo. En x : velocidad constante. En y : aceleración constante $-g$. Escribes las dos ecuaciones, hallas el tiempo con la condición de “llega al suelo” ($y = 0$), y con ese tiempo sacas todo lo demás.

PASO 1 Descomponer la velocidad inicial

$$v_{0x} = 25 \cos 40^\circ = 19,151 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 25 \sin 40^\circ = 16,070 \text{ m/s}$$

PASO 2 (a) Tiempo de vuelo: imponer $y = 0$

Tomando el suelo como $y = 0$ y el lanzamiento en $y_0 = 1,5 \text{ m}$:

$$0 = 1,5 + 16,070 t - 4,905 t^2$$

$$4,905 t^2 - 16,070 t - 1,5 = 0$$

$$t = \frac{16,070 + \sqrt{16,070^2 + 4(4,905)(1,5)}}{2(4,905)} = \frac{16,070 + 16,961}{9,81} = 3,367 \text{ s}$$

(la raíz negativa se descarta: es un tiempo “antes” del lanzamiento).

PASO 3 (b) Alcance horizontal

$$x = v_{0x} t = 19,151(3,367) = 64,5 \text{ m}$$

PASO 4 (c) Altura máxima: donde $v_y = 0$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(h - y_0) \Rightarrow h = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = 1,5 + \frac{16,070^2}{19,62} = 1,5 + 13,16 = 14,66 \text{ m}$$

PASO 5 (d) Velocidad de impacto

$$v_x = 19,151 \text{ m/s} \quad (\text{no cambia nunca})$$

$$v_y = 16,070 - 9,81(3,367) = -16,961 \text{ m/s} \quad (\text{hacia abajo})$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{19,151^2 + 16,961^2} = 25,58 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{16,961}{19,151}\right) = 41,5^\circ \text{ por debajo de la horizontal}$$

Respuesta: (a) $t = 3,37 \text{ s}$ (b) $x = 64,5 \text{ m}$ (c) $h_{max} = 14,7 \text{ m}$ (d) $v = 25,6 \text{ m/s}$ a $41,5^\circ$ bajo la horizontal.

Chequeo de sentido común

La velocidad de impacto (25,58 m/s) es apenas un poco mayor que la de lanzamiento (25 m/s). Correcto: cayó 1,5 m más abajo de donde salió, así que ganó un poquito de energía. Si te hubiera dado 40 m/s, algo está mal. Y el ángulo de impacto ($41,5^\circ$) es apenas mayor que el de salida (40°), por la misma razón.

Problema 1.6

Ruta de solución

Te dan la *forma del camino* $y = f(x)$, no $x(t)$ ni $y(t)$. El truco es derivar la ecuación del camino **respecto al tiempo**, usando la regla de la cadena. Cada vez que derives y aparece $\dot{x}$ multiplicando.

PASO 1 Derivar la trayectoria una vez

$$y = \frac{x^2}{20} \Rightarrow \dot{y} = \frac{2x \dot{x}}{20} = \frac{x \dot{x}}{10}$$

En $x = 10 \text{ m}$ con $\dot{x} = 3 \text{ m/s}$:

$$v_y = \dot{y} = \frac{10(3)}{10} = 3,0 \text{ m/s}$$

PASO 2 Derivar otra vez para la aceleración

$$\ddot{y} = \frac{1}{10} (\dot{x} \cdot \dot{x} + x \cdot \ddot{x}) = \frac{\dot{x}^2 + x \ddot{x}}{10}$$

Como v_x es constante, $\ddot{x} = 0$:

$$a_y = \ddot{y} = \frac{3^2 + 0}{10} = 0,90 \text{ m/s}^2$$

PASO 3 Armar los vectores

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 3,0\hat{i} + 3,0\hat{j} \text{ (m/s)} & \Rightarrow |\vec{v}| &= \sqrt{9+9} = 4,243 \text{ m/s}, \quad \theta_v = 45^\circ \\ \vec{a} &= 0\hat{i} + 0,90\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)} & \Rightarrow |\vec{a}| &= 0,90 \text{ m/s}^2 \text{ (vertical, hacia arriba)} \end{aligned}$$

Respuesta: (a) $v_y = 3,0 \text{ m/s}$, $a_y = 0,90 \text{ m/s}^2$. (b) $|\vec{v}| = 4,24 \text{ m/s}$ a 45° . (c) $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

La pendiente del camino en $x = 10$ es $dy/dx = x/10 = 1$, o sea 45° . Y la velocidad tiene que ser **tangente** al camino, así que su ángulo debe ser 45° . Coincide. Este chequeo (¿la velocidad es tangente al camino?) funciona en todo problema de trayectoria dada.

Hoja de respuestas rápida — Taller 1

- 1.1 $v = 3t^2 - 18t + 15$; $a = 6t - 18$; $t = 1$ y 5 s ; $\Delta s = -18 \text{ m}$; $s_T = 46 \text{ m}$.
- 1.2 $v = t^2 - 6t$; $s = t^3/3 - 3t^2$; $t = 6 \text{ s}$; $s = -36 \text{ m}$; 36 m recorridos.
- 1.3 $t = 0,625 \text{ s}$; $x = 2,31 \text{ m}$; $v(1 \text{ s}) = 1,38 \text{ m/s}$.
- 1.4 $v^2 = 25 - 100s^2$; $v(0,2) = 4,58 \text{ m/s}$; $s_{max} = 0,50 \text{ m}$.
- 1.5 $t = 3,37 \text{ s}$; $x = 64,5 \text{ m}$; $h = 14,7 \text{ m}$; $v = 25,6 \text{ m/s}$ a $41,5^\circ$.
- 1.6 $v_y = 3,0 \text{ m/s}$; $a_y = 0,90 \text{ m/s}^2$; $v = 4,24 \text{ m/s}$ a 45° ; $a = 0,90 \text{ m/s}^2$.