

TALLER 2

Coordenadas normal–tangencial ($n-t$), polares (r, θ) y cilíndricas

Semana del programa: Semana 1, Clase 2 y Semana 2, Clase 1 • **Tiempo sugerido:** 2,5 horas

Por qué este taller es el más importante del Parcial 1

De los siete parciales anteriores que revisamos, **seis** tenían un punto de coordenadas polares como primer problema. Si dominas la fórmula polar y sabes de dónde sacar r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ de la geometría del mecanismo, ya tienes medio parcial ganado.

1. Lo que necesitas de este tema

Coordenadas normal–tangencial: el sistema que viaja contigo

Los ejes n y t no están fijos en el piso: están **pegados a la partícula**. $\hat{e}_t$ apunta siempre hacia donde va, $\hat{e}_n$ apunta siempre hacia **el centro de la curva**.

$$\vec{v} = v \hat{e}_t \quad \vec{a} = \underbrace{\dot{v}}_{\text{cambia la rapidez}} \hat{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{\text{cambia la dirección}} \hat{e}_n$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

La frase que resume todo $n-t$

a_t te dice *si estás acelerando o frenando*. a_n te dice *qué tan cerrada es la curva*. Si vas en línea recta, $\rho = \infty$ y $a_n = 0$. Si vas a rapidez constante en una curva, $a_t = 0$ pero $a_n \neq 0$ y **por eso sí hay aceleración aunque el velocímetro no se mueva**.

Coordenadas polares: el brazo que gira y se estira

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

Término	Qué significa físicamente
$v_r = \dot{r}$	rapidez con que te alejas (o acercas) del origen
$v_\theta = r \dot{\theta}$	rapidez con que giras alrededor del origen
$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$	aceleración de alejamiento – aceleración centrípeta
$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$	aceleración angular + Coriolis

Cilíndricas = polares + un eje z que va por libre:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{e}_z$$

Los dos errores que matan en polares

1. Olvidar el $2\dot{r}\dot{\theta}$ (Coriolis). Si r cambia y el brazo gira, ese término **existe** aunque $\ddot{\theta} = 0$.
2. Derivar $r(\theta)$ sin regla de la cadena. Si $r = 0,4 \cos \theta$, entonces $\dot{r} = -0,4 \sin \theta \cdot \dot{\theta}$ y $\ddot{r} = -0,4(\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta})$. Ese $\dot{\theta}$ es obligatorio.

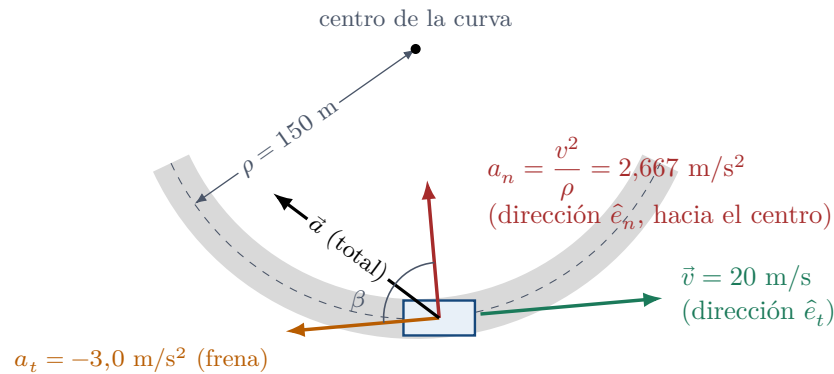
Procedimiento infalible para un problema de polares

1. Dibuja $\hat{e}_r$ (del origen hacia la partícula) y $\hat{e}_\theta$ (90° adelante, en el sentido en que crece θ).
2. Escribe la relación geométrica $r = r(\theta)$ o mide r directamente si te la dan.
3. Deriva r dos veces *respecto al tiempo*, con regla de la cadena.
4. Anota qué sabes de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ (“gira a velocidad constante” $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$).
5. Reemplaza en las dos fórmulas maestras. Ni pienses, solo reemplaza.

PARTE A — Enunciados

Problema 2.1 – Curva de carretera

Un automóvil toma una curva de radio $\rho = 150$ m con una rapidez de 20 m/s, y en ese instante está frenando a razón de $3,0$ m/s². Determine la magnitud de la aceleración total del automóvil y el ángulo que forma con la dirección del movimiento.



Problema 2.2 – El mismo problema 1.6, ahora en n-t

La partícula del Problema 1.6 recorre $y = \frac{x^2}{20}$ con $v_x = 3,0$ m/s constante. En $x = 10$ m determine:

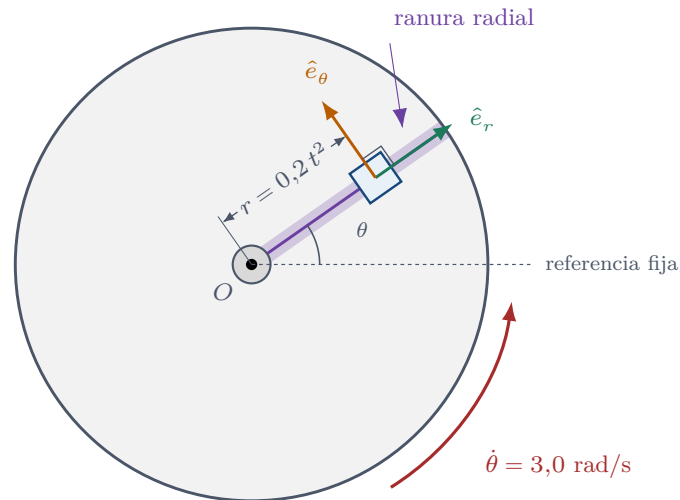
- El radio de curvatura ρ .
- Las componentes a_n y a_t .
- Verifique que $\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ coincide con el $|\vec{a}|$ que obtuvo en el Taller 1.

Problema 2.3 – Cuándo se alcanza cierta aceleración

Un auto parte del reposo sobre una pista circular de 200 m de radio y aumenta su rapidez a razón constante de $0,50$ m/s². Determine el instante en que la magnitud de su aceleración total llega a $1,5$ m/s², y la rapidez que lleva en ese momento.

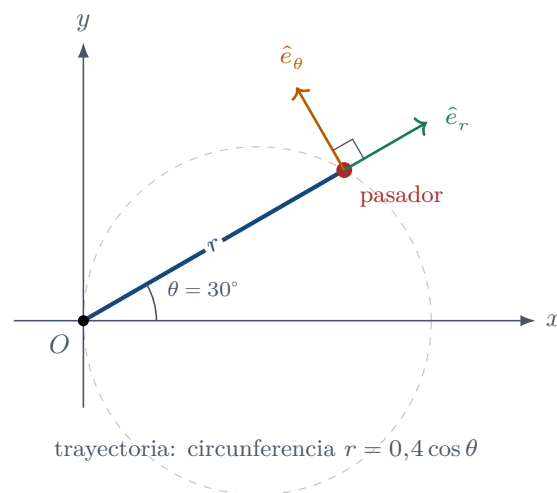
Problema 2.4 – Bloque en ranura de plataforma giratoria (tipo Parcial 2021-II)

Un bloque se desliza por la ranura radial de una plataforma según $r = 0,2t^2$ m, mientras la plataforma gira con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3,0$ rad/s. Para $t = 2,0$ s determine la velocidad y la aceleración absolutas del bloque (componentes y magnitudes).

**Problema 2.5 – Pin guiado por trayectoria circular (tipo Parcial 2022-II)**

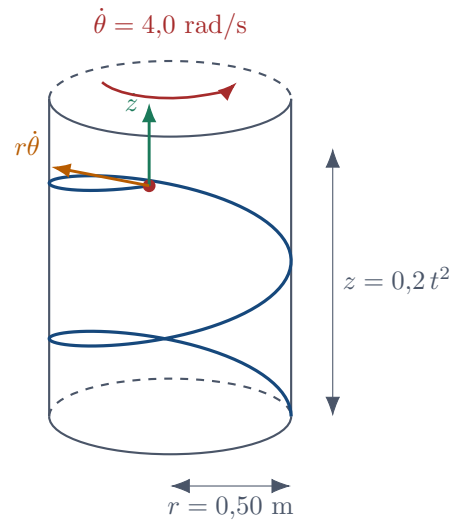
Un pasador se mueve siguiendo la trayectoria $r = 0,4 \cos \theta$ m, y el brazo que lo arrastra gira con $\dot{\theta} = 3,0$ rad/s constante. Para $\theta = 30^\circ$ determine:

- r , $\dot{r}$ y $\ddot{r}$.
- Las componentes y la magnitud de la velocidad.
- Las componentes y la magnitud de la aceleración.



Problema 2.6 – Coordenadas cilíndricas

Una partícula sube por la superficie de un cilindro de radio $r = 0,50$ m. Gira con $\dot{\theta} = 4,0$ rad/s constante y su altura varía según $z = 0,2t^2$ m. En $t = 1,0$ s determine la velocidad y la aceleración de la partícula.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 2.1

Ruta de solución

En $n-t$ solo hay dos componentes y ya te dieron una (a_t , el frenado). La otra sale de la fórmula $a_n = v^2/\rho$. Después es Pitágoras.

PASO 1 Componente normal

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20)^2}{150} = 2,667 \text{ m/s}^2$$

Apunta hacia el centro de la curva.

PASO 2 Componente tangencial

$$a_t = \dot{v} = -3,0 \text{ m/s}^2 \quad (\text{negativa porque está frenando})$$

PASO 3 Magnitud y dirección

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3,0)^2 + (2,667)^2} = \sqrt{9 + 7,111} = 4,01 \text{ m/s}^2$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{a_n}{|a_t|}\right) = \arctan\left(\frac{2,667}{3,0}\right) = 41,6^\circ$$

medido desde la dirección tangencial, hacia el centro de la curva.

Respuesta: $|\vec{a}| = 4,01 \text{ m/s}^2$, formando $41,6^\circ$ con la tangente (inclinada hacia adentro de la curva y hacia atrás, porque frena).

Chequeo de sentido común

Aunque el conductor sienta que “solo está frenando”, su aceleración real es mayor que la de frenado ($4,01 > 3,0$) porque la curva también lo acelera hacia adentro. Ese es exactamente el motivo por el que se derrapa frenando en curva.

Problema 2.2

Ruta de solución

Ya sabes $|\vec{v}|$ y $|\vec{a}|$ del Taller 1. Aquí solo repartes esa misma aceleración en dos direcciones distintas. La clave es calcular ρ con la fórmula del radio de curvatura.

PASO 1 Derivadas de la trayectoria *respecto a x* (no al tiempo)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{10} \Big|_{x=10} = 1 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{10} = 0,1$$

PASO 2 Radio de curvatura

$$\rho = \frac{[1 + (1)^2]^{3/2}}{0,1} = \frac{2^{3/2}}{0,1} = \frac{2,828}{0,1} = 28,28 \text{ m}$$

PASO 3 Rapidez y componente normal

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4,243 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{18}{28,28} = 0,636 \text{ m/s}^2$$

PASO 4 Componente tangencial

a_t es la rapidez con que cambia $|\vec{v}|$. Como $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ con v_x constante:

$$a_t = \dot{v} = \frac{v_y a_y}{v} = \frac{(3,0)(0,90)}{4,243} = 0,636 \text{ m/s}^2$$

PASO 5 Verificación

$$|\vec{a}| = \sqrt{0,636^2 + 0,636^2} = 0,900 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Coincide exactamente con el $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$ del Taller 1.

Respuesta: (a) $\rho = 28,3 \text{ m}$ (b) $a_n = a_t = 0,636 \text{ m/s}^2$ (c) $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$, igual que en $x-y$.

La moraleja

$x-y$ y $n-t$ son **dos idiomas para describir el mismo vector**. El vector aceleración es el mismo; solo cambia cómo lo partes. Por eso siempre puedes usar uno para chequear el otro.

Problema 2.3**Ruta de solución**

a_t es dato y constante, así que $v = 0,5t$. a_n crece con el tiempo porque v crece. Armas $|\vec{a}|$ en función de t , lo igualas a 1,5 y despejas.

PASO 1 Rapidez en función del tiempo

$$v = v_0 + a_t t = 0 + 0,5 t$$

PASO 2 Componente normal en función del tiempo

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0,5t)^2}{200} = 1,25 \times 10^{-3} t^2$$

PASO 3 Imponer la condición $|\vec{a}| = 1,5$

$$a_t^2 + a_n^2 = (1,5)^2 \Rightarrow 0,25 + (1,25 \times 10^{-3} t^2)^2 = 2,25$$

$$1,5625 \times 10^{-6} t^4 = 2,0 \Rightarrow t^4 = 1,28 \times 10^6 \Rightarrow t = 33,6 \text{ s}$$

PASO 4 Rapidez en ese instante

$$v = 0,5(33,64) = 16,8 \text{ m/s}$$

Respuesta: $t = 33,6 \text{ s}$, con $v = 16,8 \text{ m/s}$. (Verificación: $a_n = 16,8^2/200 = 1,414$; $\sqrt{0,5^2 + 1,414^2} = 1,50 \checkmark$)

Problema 2.4**Ruta de solución**

Problema de polares puro: te dan $r(t)$ directamente y $\dot{\theta}$. Derivas r dos veces respecto a t , anotas $\ddot{\theta} = 0$, y reemplazas en las fórmulas maestras. Nada más.

PASO 1 Sacar las cinco cantidades en $t = 2 \text{ s}$

$$\begin{aligned} r &= 0,2t^2 = 0,2(4) = 0,80 \text{ m} \\ \dot{r} &= 0,4t = 0,4(2) = 0,80 \text{ m/s} \\ \ddot{r} &= 0,40 \text{ m/s}^2 \\ \dot{\theta} &= 3,0 \text{ rad/s} \\ \ddot{\theta} &= 0 \quad (\text{"velocidad angular constante"}) \end{aligned}$$

PASO 2 Velocidad

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = 0,80 \text{ m/s} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = (0,80)(3,0) = 2,40 \text{ m/s} \\ \vec{v} &= 0,80 \hat{e}_r + 2,40 \hat{e}_\theta \text{ (m/s)}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{0,64 + 5,76} = 2,53 \text{ m/s} \end{aligned}$$

PASO 3 Aceleración

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0,40 - (0,80)(3,0)^2 = 0,40 - 7,20 = -6,80 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0,80)(3,0) = 4,80 \text{ m/s}^2 \\ \vec{a} &= -6,80 \hat{e}_r + 4,80 \hat{e}_\theta \text{ (m/s}^2\text{)}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{46,24 + 23,04} = 8,32 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 2,53 \text{ m/s}$ y $|\vec{a}| = 8,32 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

a_r salió **negativa** y muy grande: la aceleración apunta principalmente *hacia el centro*. Eso es correcto, porque el bloque está girando y todo lo que gira necesita aceleración centrípeta. Y los $4,80 \text{ m/s}^2$ de a_θ son **puro Coriolis** ($\ddot{\theta} = 0$): aparecieron solo porque el bloque se mueve hacia afuera mientras el disco gira.

Problema 2.5

Ruta de solución

Aquí r no viene en función de t sino de θ . Derivas con regla de la cadena: cada derivada temporal de algo con θ trae un $\dot{\theta}$. Como $\dot{\theta}$ es constante, $\ddot{\theta} = 0$ y todo se simplifica.

PASO 1 Derivar $r = 0,4 \cos \theta$ respecto al tiempo

$$r = 0,4 \cos \theta$$

$$\dot{r} = -0,4 \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = -0,4 (\cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin \theta \cdot \ddot{\theta}) = -0,4 \cos \theta \dot{\theta}^2 \quad (\text{pues } \ddot{\theta} = 0)$$

PASO 2 Evaluar en $\theta = 30^\circ$, $\dot{\theta} = 3 \text{ rad/s}$

$$r = 0,4(0,8660) = 0,3464 \text{ m}$$

$$\dot{r} = -0,4(0,5000)(3) = -0,600 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = -0,4(0,8660)(9) = -3,118 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo de $\dot{r}$ dice que el pasador se está *acercando* al origen.

PASO 3 Velocidad

$$v_r = -0,600 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = (0,3464)(3) = 1,039 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0,36 + 1,080} = 1,20 \text{ m/s}$$

PASO 4 Aceleración

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -3,118 - (0,3464)(9) = -3,118 - 3,118 = -6,235 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0,600)(3) = -3,600 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{38,88 + 12,96} = 7,20 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $r = 0,346 \text{ m}$, $\dot{r} = -0,600 \text{ m/s}$, $\ddot{r} = -3,118 \text{ m/s}^2$. (b) $|\vec{v}| = 1,20 \text{ m/s}$. (c) $|\vec{a}| = 7,20 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

La ecuación $r = 0,4 \cos \theta$ es una **circunferencia de diámetro 0,4 m** que pasa por el origen. El pasador recorre esa circunferencia, y se puede demostrar que lo hace con rapidez constante $v = D\dot{\theta} = 0,4(3) = 1,20 \text{ m/s}$. ¡Exactamente lo que dio! Y como la rapidez es constante, toda la aceleración es centrípeta: $a = v^2/R = 1,2^2/0,2 = 7,20 \text{ m/s}^2$. También coincide. Dos chequeos independientes.

Problema 2.6

Ruta de solución

Cilíndricas = polares + z . El movimiento vertical se resuelve aparte, como si fuera un problema de bachillerato, y se pega como tercera componente.

PASO 1 Recopilar datos en $t = 1$ s

$$r = 0,50 \text{ m}, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = 4,0 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$z = 0,2t^2 \Rightarrow \dot{z} = 0,4t = 0,40 \text{ m/s}, \quad \ddot{z} = 0,40 \text{ m/s}^2$$

PASO 2 Velocidad

$$\vec{v} = \underbrace{0}_{\dot{r}} \hat{e}_r + \underbrace{(0,5)(4)}_{r\dot{\theta}} \hat{e}_\theta + \underbrace{0,40}_{\dot{z}} \hat{e}_z = 2,0 \hat{e}_\theta + 0,40 \hat{e}_z \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4,0 + 0,16} = 2,04 \text{ m/s}$$

PASO 3 Aceleración

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (0,5)(16) = -8,0 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$a_z = \ddot{z} = 0,40 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{64 + 0 + 0,16} = 8,01 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 2,04 \text{ m/s}$ y $|\vec{a}| = 8,01 \text{ m/s}^2$ (casi toda centrípeta).

Hoja de respuestas rápida — Taller 2

2.1 $a_n = 2,667$; $|\vec{a}| = 4,01 \text{ m/s}^2$ a $41,6^\circ$. **2.2** $\rho = 28,28 \text{ m}$; $a_n = a_t = 0,636$; $|\vec{a}| = 0,90 \text{ m/s}^2$. **2.3** $t = 33,6 \text{ s}$; $v = 16,8 \text{ m/s}$.

2.4 $\vec{v} = 0,8\hat{e}_r + 2,4\hat{e}_\theta$, $|v| = 2,53 \text{ m/s}$; $\vec{a} = -6,8\hat{e}_r + 4,8\hat{e}_\theta$, $|a| = 8,32 \text{ m/s}^2$.

2.5 $r = 0,346$; $\dot{r} = -0,600$; $\ddot{r} = -3,118$; $|v| = 1,20 \text{ m/s}$; $|a| = 7,20 \text{ m/s}^2$. **2.6** $|v| = 2,04 \text{ m/s}$; $|a| = 8,01 \text{ m/s}^2$.