

TALLER 3

Movimiento vinculado (poleas y cables) y movimiento relativo con ejes en traslación

Semana del programa: Semana 2, Clase 2 y Semana 3, Clase 1 • Tiempo sugerido: 2,5 horas

1. Lo que necesitas de este tema

Movimiento dependiente: la cuerda no se estira

Toda la idea cabe en una frase: **la longitud total del cable es constante**. Entonces:

1. Escoge un **datum** (línea fija de referencia) para cada bloque.
2. Escribe la longitud del cable sumando todos los tramos: $L = (\text{algo}) s_A + (\text{algo}) s_B + \text{constantes}$.
3. Deriva respecto al tiempo: las constantes desaparecen y queda $0 = \alpha v_A + \beta v_B$.
4. Deriva otra vez: $0 = \alpha a_A + \beta a_B$.

El truco para no equivocarse con el signo

Cuenta **cuántos tramos de cable** sostienen a cada bloque. Si n tramos sostienen al bloque B , entonces $n s_B$ aparece en la ecuación de longitud, y ese bloque se mueve n **veces más lento** que el extremo libre del cable. Si un bloque se mueve hacia donde *aumenta* su s , su velocidad es positiva; el signo negativo que sale al final significa “se mueve hacia donde s disminuye”.

Movimiento relativo con ejes en traslación

El observador se monta sobre B (pero sin girar con él). Entonces:

$$\boxed{\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}} \quad \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}} \quad \boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}}$$

Se lee: “lo que hace A (visto desde el piso) = lo que hace B + lo que hace A visto desde B ”.

El orden de los subíndices

$\vec{v}_{A/B}$ es “la velocidad de A **respecto a** B ”. Se despeja así: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. **Siempre el primero menos el segundo**. Y $\vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$: mismo tamaño, sentido opuesto.

Cuando el “brazo” entre los dos cuerpos gira

Si A y B están unidos por un cable, una barra o una cuerda de remolque de longitud r que **gira**, entonces $\vec{v}_{A/B}$ y $\vec{a}_{A/B}$ se escriben en **polares** montadas en B :

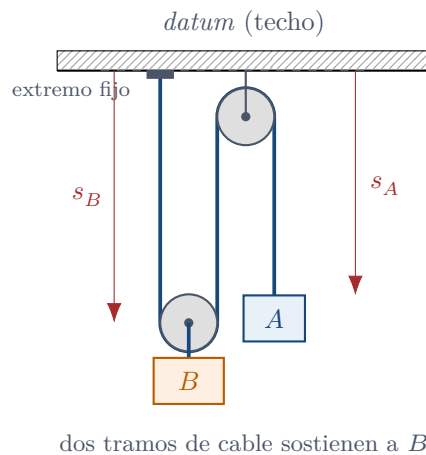
$$\vec{v}_{A/B} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \vec{a}_{A/B} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

Esta combinación (relativo + polares) es la que aparece en los parciales de avión–planeador y lancha–esquiador.

PARTE A — Enunciados

Problema 3.1 – Polea móvil

En el sistema de la figura, el bloque B cuelga de una polea móvil y el bloque A del extremo libre del cable. Si A desciende con una rapidez de $6,0 \text{ m/s}$ y una aceleración de $2,0 \text{ m/s}^2$ (ambas hacia abajo), determine la velocidad y la aceleración del bloque B .



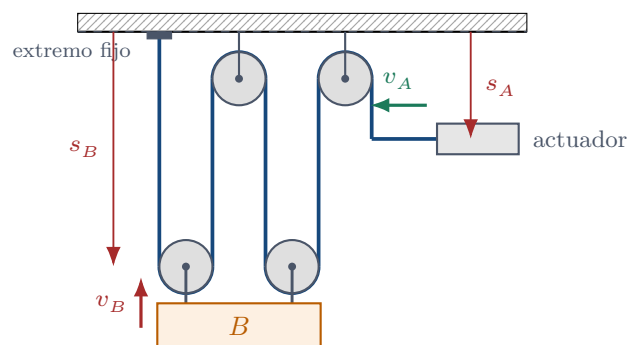
Problema 3.2 – Actuador con cuatro tramos (tipo Parcial 2020-II)

Un actuador hidráulico retrae un cable con rapidez $v_A = 1,2 \text{ m/s}$ y aceleración $a_A = 0,8 \text{ m/s}^2$. El bloque B está sostenido por **cuatro tramos** de cable, de modo que la restricción del sistema es

$$s_A + 4s_B = L$$

Determine:

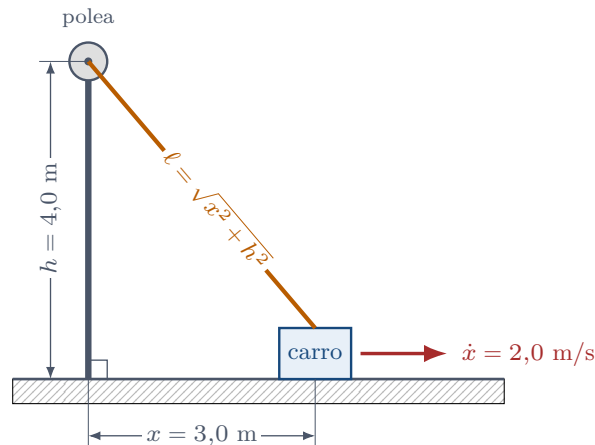
- La velocidad y la aceleración del bloque B .
- La velocidad del extremo del cable respecto al bloque B .



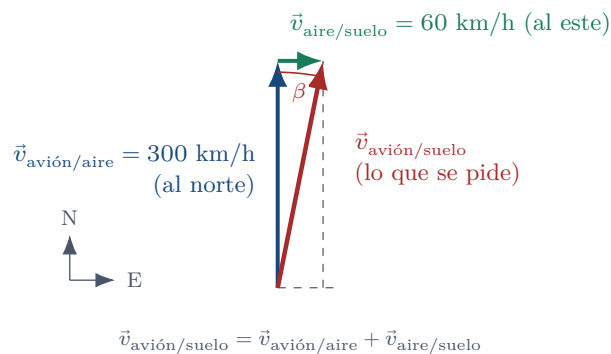
Problema 3.3 – Restricción no lineal (tipo Parcial 2022-II)

Un carro se aleja horizontalmente de la base de un poste con rapidez constante $\dot{x} = 2,0 \text{ m/s}$. Un cable va del carro hasta una polea en lo alto del poste, a $h = 4,0 \text{ m}$ de altura. En el instante en que $x = 3,0 \text{ m}$ determine:

- La rapidez con que se desenrolla el cable.
- La aceleración con que se desenrolla el cable.

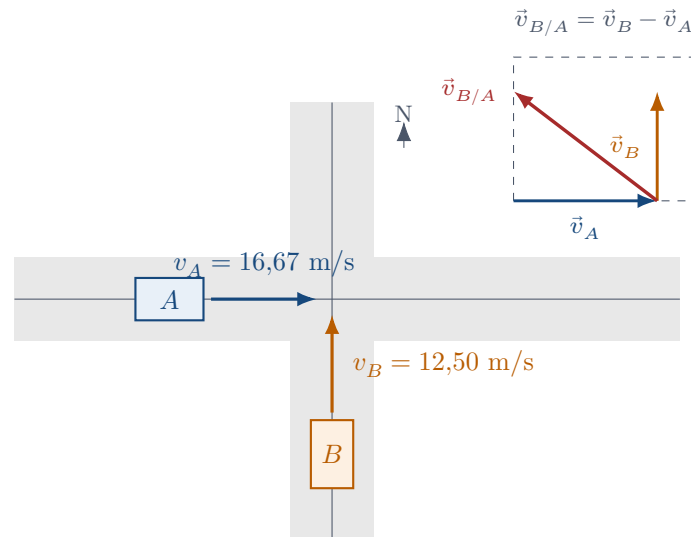
**Problema 3.4 – Avión con viento**

Un avión vuela con una velocidad de 300 km/h **respecto al aire**, apuntando hacia el norte. El viento sopla del oeste hacia el este a 60 km/h . Determine la velocidad del avión respecto al suelo (magnitud y dirección).



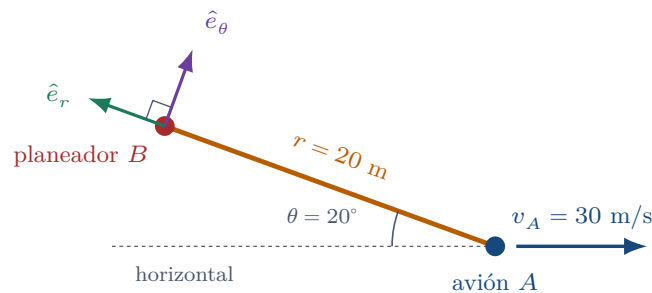
Problema 3.5 – Dos automóviles en un cruce

El automóvil A viaja hacia el este a 60 km/h y está acelerando a $1,2 \text{ m/s}^2$. El automóvil B viaja hacia el norte a 45 km/h y está frenando a $1,5 \text{ m/s}^2$. Determine la velocidad y la aceleración de B vistas desde A .



Problema 3.6 – Avión que remolca un planeador (tipo Parcial 2022-I)

Un avión A vuela horizontalmente con rapidez constante $v_A = 30 \text{ m/s}$ y remolca un planeador B mediante un cable de longitud constante $r = 20 \text{ m}$. El planeador gana altura de modo que el ángulo θ del cable con la horizontal aumenta a razón constante $\dot{\theta} = 0,10 \text{ rad/s}$. Para $\theta = 20^\circ$ determine la velocidad y la aceleración del planeador.



Nota: el avión vuela hacia la derecha y el planeador va atrás y arriba. $\hat{e}_r$ va del avión hacia el planeador; $\hat{e}_\theta$ apunta en el sentido en que crece θ .

PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 3.1

Ruta de solución

Escribe la longitud del cable en función de s_A y s_B medidos desde el techo, deriva dos veces, y reemplaza.

PASO 1 Ecuación de longitud del cable

Siguiendo el cable desde el anclaje: baja s_B hasta la polea móvil, sube s_B de vuelta, cruza la polea fija (tramo constante) y baja s_A :

$$L = s_B + s_B + s_A + \text{constantes} \Rightarrow 2s_B + s_A = L$$

PASO 2 Derivar una vez (velocidades)

$$2v_B + v_A = 0 \Rightarrow v_B = -\frac{v_A}{2}$$

Con $v_A = +6,0$ m/s (positivo porque A baja y s_A crece hacia abajo):

$$v_B = -3,0 \text{ m/s}$$

El signo menos significa que s_B *disminuye*: el bloque B **sube** a 3,0 m/s.

PASO 3 Derivar otra vez (aceleraciones)

$$2a_B + a_A = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{2,0}{2} = -1,0 \text{ m/s}^2$$

Es decir, B acelera hacia arriba a $1,0$ m/s².

Respuesta: $v_B = 3,0$ m/s **hacia arriba**; $a_B = 1,0$ m/s² **hacia arriba**.

Chequeo de sentido común

Dos tramos sostienen a B , así que B se mueve la **mitad** de rápido que A . Ese es el precio del sistema de poleas: ganas fuerza (la tensión sostiene el doble de peso) pero pierdes velocidad. Si te hubiera dado B más rápido que A , el razonamiento está invertido.

Problema 3.2

Ruta de solución

Aquí la restricción te la dan hecha. Derivar y reemplazar. La parte (b) es simplemente aplicar la definición de velocidad relativa.

PASO 1 Derivar la restricción

$$s_A + 4s_B = L \Rightarrow v_A + 4v_B = 0 \Rightarrow v_B = -\frac{v_A}{4}$$

$$a_A + 4a_B = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{a_A}{4}$$

PASO 2 Reemplazar

$$|v_B| = \frac{1,2}{4} = 0,30 \text{ m/s} \quad |a_B| = \frac{0,8}{4} = 0,20 \text{ m/s}^2$$

PASO 3 (b) Velocidad relativa del cable respecto a B

Tomando como positivo el sentido en que se mueve el cable:

$$v_{A/B} = v_A - v_B = 1,2 - (-0,30) = 1,50 \text{ m/s}$$

Respuesta: (a) $v_B = 0,30 \text{ m/s}$ y $a_B = 0,20 \text{ m/s}^2$, en sentido contrario al del cable. (b) $v_{A/B} = 1,50 \text{ m/s}$.

Problema 3.3**Ruta de solución**

La restricción no es una suma de tramos rectos: es un **teorema de Pitágoras**. Se escribe la longitud, se deriva respecto al tiempo (regla de la cadena), y se deriva otra vez. Es el problema que más asusta en el parcial y es puro cálculo.

PASO 1 Escribir la longitud del tramo inclinado

$$\ell = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + 16}$$

PASO 2 Derivar respecto al tiempo

$$\dot{\ell} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 16}} \cdot 2x \dot{x} = \frac{x \dot{x}}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x \dot{x}}{\ell}$$

En $x = 3 \text{ m}$: $\ell = \sqrt{9 + 16} = 5,0 \text{ m}$, y

$$\dot{\ell} = \frac{(3)(2)}{5} = 1,20 \text{ m/s}$$

PASO 3 Derivar otra vez

Derivando $\dot{\ell} = \frac{x \dot{x}}{\ell}$ como un cociente:

$$\ddot{\ell} = \frac{(\dot{x}^2 + x \ddot{x}) \ell - (x \dot{x}) \dot{\ell}}{\ell^2} = \frac{\dot{x}^2 + x \ddot{x}}{\ell} - \frac{(x \dot{x})^2}{\ell^3}$$

Con $\ddot{x} = 0$ (rapidez constante):

$$\ddot{\ell} = \frac{(2)^2}{5} - \frac{(3 \cdot 2)^2}{125} = 0,80 - 0,288 = 0,512 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) El cable se desenrolla a $1,20 \text{ m/s}$. (b) Con una aceleración de $0,512 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

$\dot{\ell} = 1,20 \text{ m/s}$ es **menor** que $\dot{x} = 2,0 \text{ m/s}$. Tiene que ser así: el carro se aleja en diagonal respecto al cable, y solo la *componente a lo largo del cable* estira la cuerda. De hecho $\dot{\ell} = \dot{x} \cos \alpha$, donde α es el ángulo entre el cable y el piso: $\cos \alpha = 3/5 = 0,6$, y $2(0,6) = 1,2 \checkmark$. Ese atajo sirve para verificar siempre.

Truco

Nota que aunque el carro va a **velocidad constante**, el cable sí tiene aceleración. La aceleración aparece porque la *geometría* cambia, no porque el carro acelere. Ese es el corazón de todos los problemas de mecanismos.

Problema 3.4**PASO 1 Plantear la ecuación de velocidades**

$$\vec{v}_{\text{avión/suelo}} = \vec{v}_{\text{aire/suelo}} + \vec{v}_{\text{avión/aire}}$$

Tomando $\hat{i}$ hacia el este y $\hat{j}$ hacia el norte:

$$\vec{v} = \underbrace{60}_{\text{viento}} \hat{i} + \underbrace{300}_{\text{avión respecto al aire}} \hat{j} = 60 \hat{i} + 300 \hat{j} \text{ (km/h)}$$

PASO 2 Magnitud y dirección

$$|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 300^2} = 305,9 \text{ km/h}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{60}{300}\right) = 11,3^\circ \text{ al este del norte}$$

Respuesta: 305,9 km/h, desviado 11,3° hacia el este respecto al norte.

Chequeo de sentido común

El avión apuntaba al norte pero termina yendo hacia el nor-noreste: lo arrastró el viento. Por eso los pilotos corrigen el rumbo. Si alguna vez te da que el avión termina yendo exactamente al norte con viento lateral, revisa la suma vectorial.

Problema 3.5**PASO 1 Convertir unidades y escribir los vectores**

$$v_A = \frac{60}{3,6} = 16,667 \text{ m/s (este)} \quad v_B = \frac{45}{3,6} = 12,50 \text{ m/s (norte)}$$

$$\vec{v}_A = 16,667 \hat{i}, \quad \vec{v}_B = 12,50 \hat{j}$$

$$\vec{a}_A = 1,2 \hat{i} \text{ (acelera hacia el este)}, \quad \vec{a}_B = -1,5 \hat{j} \text{ (frena yendo al norte)}$$

PASO 2 Velocidad relativa

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -16,667 \hat{i} + 12,50 \hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}_{B/A}| = \sqrt{277,8 + 156,3} = 20,83 \text{ m/s}$$

$$\text{dirección: } \arctan\left(\frac{12,50}{16,667}\right) = 36,9^\circ \text{ al norte del oeste}$$

PASO 3 Aceleración relativa

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -1,2\hat{i} - 1,5\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}_{B/A}| = \sqrt{1,44 + 2,25} = 1,92 \text{ m/s}^2 \quad \text{dirigida al suroeste}$$

Respuesta: $\vec{v}_{B/A} = (-16,67\hat{i} + 12,50\hat{j}) \text{ m/s}$, $|\vec{v}_{B/A}| = 20,8 \text{ m/s}$. $\vec{a}_{B/A} = (-1,2\hat{i} - 1,5\hat{j}) \text{ m/s}^2$, $|\vec{a}_{B/A}| = 1,92 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

Para el conductor de A , el auto B parece venir hacia atrás y hacia la izquierda, aunque B en realidad va derecho al norte. Eso es exactamente lo que uno percibe en un cruce: el otro carro “se mueve raro” porque uno mismo se está moviendo.

Problema 3.6

Ruta de solución

Este es el problema mixto: **relativo** + **polares**. El planeador = avión + lo que el planeador hace visto desde el avión, y eso último es un movimiento circular de radio r (el cable no se estira).

PASO 1 Datos y vectores unitarios

$$r = 20 \text{ m}, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = 0,10 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\theta} = 0, \quad \theta = 20^\circ$$

Con $\hat{i}$ en el sentido de vuelo del avión (hacia la derecha) y $\hat{j}$ hacia arriba, el planeador está *atrás y arriba*:

$$\hat{e}_r = -\cos 20^\circ \hat{i} + \sin 20^\circ \hat{j}, \quad \hat{e}_\theta = \sin 20^\circ \hat{i} + \cos 20^\circ \hat{j}$$

PASO 2 Velocidad relativa del planeador respecto al avión

Como $\dot{r} = 0$, solo queda la componente $\hat{e}_\theta$:

$$|\vec{v}_{B/A}| = r\dot{\theta} = (20)(0,10) = 2,0 \text{ m/s}$$

Descomponiendo esa velocidad (perpendicular al cable, en el sentido en que θ crece):

$$\vec{v}_{B/A} = 2,0 \sin 20^\circ \hat{i} + 2,0 \cos 20^\circ \hat{j} = (0,684\hat{i} + 1,879\hat{j}) \text{ m/s}$$

PASO 3 Velocidad absoluta del planeador

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = 30\hat{i} + (0,684\hat{i} + 1,879\hat{j}) = 30,684\hat{i} + 1,879\hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{941,5 + 3,53} = 30,74 \text{ m/s}, \quad \text{a } 3,51^\circ \text{ sobre la horizontal}$$

PASO 4 Aceleración relativa

Con $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$, de la fórmula polar solo sobrevive el término centrípeta:

$$\vec{a}_{B/A} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r = -(20)(0,10)^2 \hat{e}_r = -0,20 \hat{e}_r$$

Como $\hat{e}_r$ va del avión al planeador, el signo menos indica que la aceleración va **del planeador hacia el avión**: es puramente centrípeta.

PASO 5 Aceleración absoluta

Como $\vec{a}_A = 0$ (el avión va a rapidez constante en línea recta):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} \Rightarrow |\vec{a}_B| = 0,20 \text{ m/s}^2 \text{ apuntando hacia el avión}$$

En componentes: $\vec{a}_B = -0,20 \hat{e}_r = (0,188 \hat{i} - 0,068 \hat{j}) \text{ m/s}^2$.

Respuesta: $|\vec{v}_B| = 30,74 \text{ m/s}$ a $3,51^\circ$ sobre la horizontal. $|\vec{a}_B| = 0,20 \text{ m/s}^2$ dirigida a lo largo del cable, hacia el avión.

Chequeo de sentido común

La aceleración del planeador apunta **a lo largo del cable hacia el avión**. Eso tiene sentido físico: visto desde el avión, el planeador da vueltas en un círculo de 20 m, y todo movimiento circular a rapidez angular constante tiene aceleración puramente centrípeta. Si te da una componente perpendicular al cable, es que colaste un $\ddot{\theta}$ o un $\dot{r}$ que no existe.

Hoja de respuestas rápida — Taller 3

3.1 $2s_B + s_A = L$; $v_B = 3,0 \text{ m/s} \uparrow$; $a_B = 1,0 \text{ m/s}^2 \uparrow$. **3.2** $v_B = 0,30 \text{ m/s}$; $a_B = 0,20 \text{ m/s}^2$; $v_{A/B} = 1,50 \text{ m/s}$.

3.3 $\ell = 5,0 \text{ m}$; $\dot{\ell} = 1,20 \text{ m/s}$; $\ddot{\ell} = 0,512 \text{ m/s}^2$. **3.4** $305,9 \text{ km/h}$ a $11,3^\circ$ al este del norte.

3.5 $\vec{v}_{B/A} = (-16,67; 12,50) \text{ m/s}$, $20,8 \text{ m/s}$; $\vec{a}_{B/A} = (-1,2; -1,5) \text{ m/s}^2$, $1,92 \text{ m/s}^2$.

3.6 $|\vec{v}_B| = 30,74 \text{ m/s}$ a $3,51^\circ$; $|\vec{a}_B| = 0,20 \text{ m/s}^2$ hacia el avión.