

TALLER 4

Cuerpo rígido: rotación, velocidad y aceleración relativas, centro instantáneo

Semana del programa: Semana 3, Clase 2 y Semana 4 • Tiempo sugerido: 3 horas

1. Lo que necesitas de este tema

El cambio de mentalidad

Hasta ahora una partícula era un punto. Ahora el cuerpo tiene **tamaño**, así que sus puntos se mueven distinto entre sí. Pero como el cuerpo es rígido, la **distancia entre dos puntos nunca cambia**, y de ahí sale todo:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

En movimiento plano $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ y $\vec{\alpha} = \alpha \hat{k}$, así que:

$$\omega \hat{k} \times (x \hat{i} + y \hat{j}) = \omega(-y \hat{i} + x \hat{j})$$

Cómo leer la ecuación

$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_A}_{\text{traslación}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}}_{\text{rotación alrededor de A}}$. Todo movimiento plano es “arrastre + giro”. El término

$\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ siempre es **perpendicular** a la línea AB y vale $\omega \cdot |AB|$.

En la aceleración pasa lo mismo, pero el giro aporta **dos** pedazos: uno tangencial ($\alpha \times \vec{r}$, perpendicular a AB) y uno normal ($-\omega^2 \vec{r}$, que siempre apunta **de B hacia A**).

Rotación alrededor de un eje fijo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad \alpha d\theta = \omega d\omega$$

Para un punto a distancia r del eje:

$$v = \omega r, \quad a_t = \alpha r, \quad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Es la misma escalera del Taller 1, pero con letras griegas. Si α es constante valen $\omega = \omega_0 + \alpha t$ y $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$.

Centro instantáneo de rotación (CIR)

En cada instante existe un punto (que puede estar fuera del cuerpo) con velocidad **cero**. Si lo encuentras, el cuerpo se comporta como si solo girara alrededor de él:

$$v_P = \omega \cdot d_{P-\text{CIR}} \quad \text{para cualquier punto } P$$

Cómo hallarlo: traza una **perpendicular a la velocidad** de dos puntos distintos. Donde se cruzan está el CIR.

El CIR solo sirve para velocidades

Es un atajo excelente para velocidades y una **trampa mortal** para aceleraciones: el punto que es CIR ahora no lo será dentro de un instante, así que su aceleración *no* es cero. Para aceleraciones usa siempre la ecuación de aceleración relativa.

Receta de 4 pasos para cualquier mecanismo

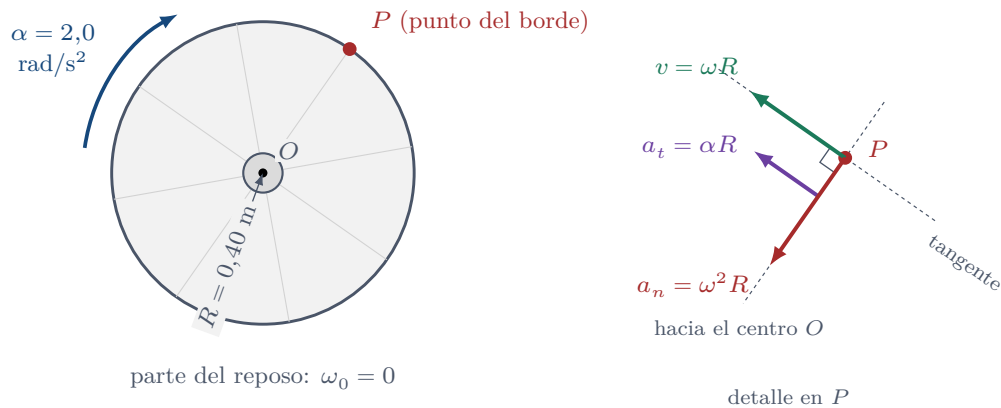
1. **Dibuja** el mecanismo a escala y ubica los puntos con coordenadas (x, y) .
2. **Identifica qué sabes:** en un pasador fijo $\vec{v} = 0$; en un collarín la velocidad va *a lo largo* de la guía; en una barra con rotador conocido $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
3. **Escribe** $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ y separa en componentes $\hat{i}$ y $\hat{j}$: quedan **dos ecuaciones y dos incógnitas**.
4. **Repite** con la ecuación de aceleración, usando el ω que acabas de hallar.

PARTE A — Enunciados

Problema 4.1 – Rotación alrededor de un eje fijo

Una polea de 0,40 m de radio parte del reposo y acelera angularmente a razón constante $\alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$. Para $t = 3,0 \text{ s}$ determine:

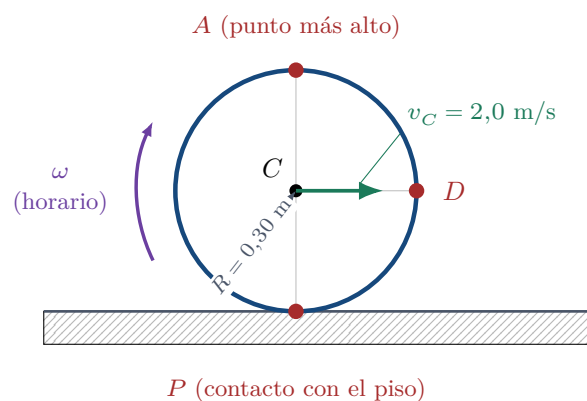
- La velocidad angular y el ángulo girado.
- La velocidad, la aceleración tangencial, la aceleración normal y la aceleración total de un punto del borde.



Problema 4.2 – Rueda que rueda sin deslizar

Una rueda de radio $R = 0,30 \text{ m}$ rueda sin deslizar sobre el piso; su centro C avanza a $2,0 \text{ m/s}$ hacia la derecha. Determine:

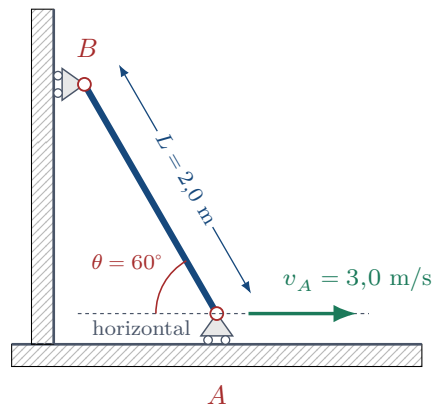
- La velocidad angular de la rueda.
- La velocidad del punto más alto A y del punto de contacto P .
- La velocidad del punto D situado al mismo nivel del centro, en el lado derecho.



Problema 4.3 – Barra apoyada en pared y piso

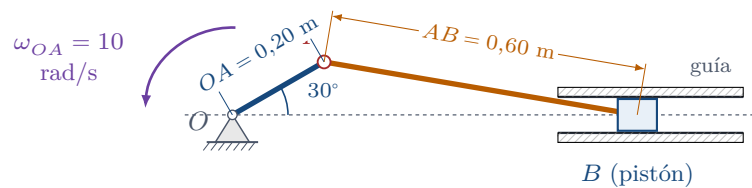
Una barra AB de 2,0 m de longitud tiene el extremo A sobre el piso y el extremo B contra la pared. En el instante mostrado la barra forma 60° con la horizontal y el extremo A se aleja de la pared con rapidez constante $v_A = 3,0$ m/s. Determine:

- La velocidad angular de la barra y la velocidad de B .
- La posición del centro instantáneo de rotación, y verifique con él los resultados de (a).
- La aceleración angular de la barra y la aceleración de B .

**Problema 4.4 – Mecanismo biela-manivela (velocidades y aceleraciones)**

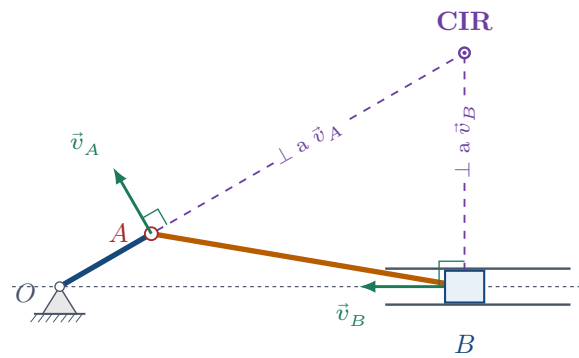
La manivela OA mide 0,20 m y gira en sentido **antihorario** con velocidad angular constante $\omega_{OA} = 10$ rad/s. La biela AB mide 0,60 m y el pistón B se desliza sobre la línea horizontal que pasa por O . Para el instante en que la manivela forma 30° con la horizontal determine:

- La velocidad angular de la biela AB y la velocidad del pistón.
- La aceleración angular de la biela y la aceleración del pistón.



Problema 4.5 – El mismo mecanismo, ahora con el CIR

Para el mecanismo del Problema 4.4, halle la posición del centro instantáneo de rotación de la biela AB y úselo para calcular de nuevo ω_{AB} y v_B . Compare con lo obtenido en 4.4.



El CIR es donde se cortan las dos perpendiculares. La $\perp$ a $\vec{v}_A$ es la prolongación de OA ; la $\perp$ a $\vec{v}_B$ es la vertical por B . En el CIR la biela AB tiene velocidad cero en ese instante.

PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 4.1

PASO 1 Cinemática angular con α constante

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 2,0(3,0) = 6,0 \text{ rad/s}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(2,0)(9) = 9,0 \text{ rad} = 1,43 \text{ vueltas}$$

PASO 2 Llevar el giro al borde

$$v = \omega R = (6,0)(0,40) = 2,40 \text{ m/s}$$

$$a_t = \alpha R = (2,0)(0,40) = 0,80 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \omega^2 R = (36)(0,40) = 14,4 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0,80^2 + 14,4^2} = 14,42 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$, $\theta = 9,0 \text{ rad}$. (b) $v = 2,40 \text{ m/s}$; $a_t = 0,80$; $a_n = 14,4$; $|\vec{a}| = 14,42 \text{ m/s}^2$.

Chequeo de sentido común

a_n es 18 veces mayor que a_t . Es lo normal: apenas el cuerpo toma algo de velocidad angular, la componente centrípeta ($\propto \omega^2$) domina por completo. Por eso las piezas que giran rápido fallan por fuerza centrífuga y no por el arranque.

Problema 4.2

Ruta de solución

“Rodar sin deslizar” significa exactamente una cosa: **el punto de contacto tiene velocidad cero**. O sea, el punto de contacto *es* el CIR. Con eso todo sale con una multiplicación.

PASO 1 Velocidad angular a partir de la condición de rodadura

El CIR es P , y el centro C está a $R = 0,30 \text{ m}$ de él:

$$v_C = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{2,0}{0,30} = 6,67 \text{ rad/s} \quad (\text{horario})$$

PASO 2 Velocidad de A y de P

$$v_A = \omega \cdot d_{A-P} = 6,67(0,60) = 4,0 \text{ m/s} \quad (\text{hacia la derecha})$$

$$v_P = \omega \cdot 0 = 0$$

PASO 3 Velocidad de D

$$d_{D-P} = \sqrt{0,30^2 + 0,30^2} = 0,4243 \text{ m}$$

$v_D = 6,67(0,4243) = 2,83 \text{ m/s}$ perpendicular a PD , es decir a 45° hacia arriba y a la derecha

Respuesta: (a) $\omega = 6,67 \text{ rad/s}$ horario. (b) $v_A = 4,0 \text{ m/s}$, $v_P = 0$. (c) $v_D = 2,83 \text{ m/s}$ a 45° .

Chequeo de sentido común

El punto más alto va al **doble** de la velocidad del centro y el de contacto está quieto. Por eso en una foto de una bicicleta en movimiento la parte de arriba de la rueda sale borrosa y la de abajo sale nítida. Ese es literalmente el chequeo visual del CIR.

Problema 4.3

PASO 1 Ubicar los puntos

$$A = (2 \cos 60^\circ, 0) = (1,0; 0) \text{ m} \quad B = (0, 2 \sin 60^\circ) = (0; 1,732) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = B - A = (-1,0; 1,732) \text{ m}$$

PASO 2 Ecuación de velocidad relativa

A solo puede moverse horizontal ($\vec{v}_A = 3,0\hat{i}$) y B solo vertical ($\vec{v}_B = v_B\hat{j}$):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \hat{k} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$v_B \hat{j} = 3,0\hat{i} + \omega(-1,732\hat{i} - 1,0\hat{j})$$

PASO 3 Separar en componentes

$$\hat{i}: 0 = 3,0 - 1,732\omega \Rightarrow \omega = 1,732 \text{ rad/s}$$

$$\hat{j}: v_B = -1,0(1,732) = -1,732 \text{ m/s}$$

El signo menos dice que B **baja** por la pared, como era de esperarse.

PASO 4 (b) Centro instantáneo de rotación

$\vec{v}_A$ es horizontal $\Rightarrow$ su perpendicular es la vertical $x = 1,0$.

$\vec{v}_B$ es vertical $\Rightarrow$ su perpendicular es la horizontal $y = 1,732$.

Se cruzan en:

$$\text{CIR} = (1,0; 1,732) \text{ m}$$

Verificación:

$$d_A = 1,732 \text{ m} \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{d_A} = \frac{3,0}{1,732} = 1,732 \text{ rad/s} \checkmark$$

$$d_B = 1,0 \text{ m} \Rightarrow v_B = \omega d_B = 1,732 \text{ m/s} \checkmark$$

PASO 5 (c) Aceleraciones

Como v_A es constante, $\vec{a}_A = 0$. Y B solo acelera verticalmente:

$$a_B \hat{j} = 0 + \alpha \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

$$a_B \hat{j} = \alpha(-1,732\hat{i} - 1,0\hat{j}) - 3,0(-1,0\hat{i} + 1,732\hat{j})$$

$$\hat{i}: 0 = -1,732\alpha + 3,0 \Rightarrow \alpha = 1,732 \text{ rad/s}^2$$

$$\hat{j}: a_B = -1,0(1,732) - 3,0(1,732) = -1,732 - 5,196 = -6,93 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\omega = 1,73 \text{ rad/s}$; $v_B = 1,73 \text{ m/s}$ hacia abajo. (b) CIR en $(1,0; 1,73) \text{ m}$. (c) $\alpha = 1,73 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 6,93 \text{ m/s}^2$ hacia abajo.

Chequeo de sentido común

B tiene aceleración aunque A no la tenga. Eso no es un error: la barra está *girando*, y girar a velocidad angular constante ya produce aceleración normal. Además el CIR $(1; 1,73)$ está justo en la esquina del rectángulo que forman la pared, el piso y la barra: eso siempre pasa en este problema y sirve de chequeo instantáneo.

Problema 4.4

Ruta de solución

Dos cuerpos: la manivela (que ya sabes todo de ella) y la biela (que tiene ω_{AB} y α_{AB} desconocidos). El punto A es la bisagra que los conecta: pertenece a los dos. Así que primero sacas $\vec{v}_A$ de la manivela y después lo metes en la ecuación de la biela.

PASO 1 Geometría: ubicar A y B

$$A = 0,20(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = (0,1732; 0,1000) \text{ m}$$

B está sobre el eje x y a $0,60 \text{ m}$ de A :

$$(x_B - 0,1732)^2 + (0,1)^2 = 0,36 \Rightarrow x_B = 0,1732 + \sqrt{0,35} = 0,7648 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (0,5916; -0,1000) \text{ m}$$

PASO 2 Velocidad de A (viene de la manivela)

$$\vec{v}_A = \omega_{OA} \hat{k} \times \vec{r}_{A/O} = 10 \hat{k} \times (0,1732 \hat{i} + 0,1 \hat{j}) = -1,000 \hat{i} + 1,732 \hat{j} \text{ (m/s)}$$

(magnitud = $0,2 \times 10 = 2,0 \text{ m/s}$, perpendicular a OA ✓)

PASO 3 Ecuación de velocidad de la biela

B solo se mueve horizontalmente: $\vec{v}_B = v_B \hat{i}$.

$$v_B \hat{i} = (-1,000 \hat{i} + 1,732 \hat{j}) + \omega_{AB} \hat{k} \times (0,5916 \hat{i} - 0,1000 \hat{j})$$

$$v_B \hat{i} = (-1,000 \hat{i} + 1,732 \hat{j}) + \omega_{AB}(0,1000 \hat{i} + 0,5916 \hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = 1,732 + 0,5916 \omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = -2,928 \text{ rad/s (horaria)}$$

$$\hat{i}: v_B = -1,000 + 0,1000(-2,928) = -1,293 \text{ m/s}$$

PASO 4 Aceleración de A

Como ω_{OA} es constante, $\alpha_{OA} = 0$ y solo queda la componente normal:

$$\vec{a}_A = -\omega_{OA}^2 \vec{r}_{A/O} = -100(0,1732 \hat{i} + 0,1 \hat{j}) = -17,32 \hat{i} - 10,00 \hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

PASO 5 Ecuación de aceleración de la biela

$$a_B \hat{i} = \vec{a}_A + \alpha_{AB} \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{B/A}$$

Con $\omega_{AB}^2 = 8,573$:

$$a_B \hat{i} = (-17,32 \hat{i} - 10,00 \hat{j}) + \alpha_{AB}(0,1000 \hat{i} + 0,5916 \hat{j}) - 8,573(0,5916 \hat{i} - 0,1000 \hat{j})$$

$$\hat{j}: 0 = -10,00 + 0,5916 \alpha_{AB} + 0,8573 \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{9,143}{0,5916} = 15,45 \text{ rad/s}^2$$

$$\hat{i}: a_B = -17,32 + 0,1000(15,45) - 5,071 = -20,85 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: (a) $\omega_{AB} = 2,93 \text{ rad/s}$ horaria; $v_B = 1,293 \text{ m/s}$ hacia la **izquierda**. (b) $\alpha_{AB} = 15,45 \text{ rad/s}^2$ antihoraria; $a_B = 20,85 \text{ m/s}^2$ hacia la izquierda.

Cuidado

Fíjate en el orden: la componente $\hat{j}$ dio la incógnita angular y la $\hat{i}$ dio la lineal. **Siempre resuelve primero la ecuación donde solo hay una incógnita.** Si intentas resolver las dos a la vez te vas a enredar.

Problema 4.5

PASO 1 Trazar las dos perpendiculares

$\vec{v}_A$ es perpendicular a $OA \Rightarrow$ la perpendicular a $\vec{v}_A$ es la **línea OA prolongada**.

$\vec{v}_B$ es horizontal $\Rightarrow$ la perpendicular a $\vec{v}_B$ es la **vertical que pasa por B** , o sea $x = 0,7648$.

PASO 2 Intersección

La recta OA tiene pendiente $\tan 30^\circ = 0,5774$. En $x = 0,7648$:

$$y = 0,5774(0,7648) = 0,4416$$

$$\text{CIR} = (0,7648; 0,4416) \text{ m}$$

PASO 3 Distancias y comprobación

$$d_A = \sqrt{(0,7648 - 0,1732)^2 + (0,4416 - 0,1)^2} = \sqrt{0,5916^2 + 0,3416^2} = 0,6831 \text{ m}$$

$$d_B = 0,4416 \text{ m}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{d_A} = \frac{2,00}{0,6831} = 2,928 \text{ rad/s} \checkmark$$

$$v_B = \omega_{AB} d_B = 2,928(0,4416) = 1,293 \text{ m/s} \checkmark$$

Respuesta: CIR en $(0,765; 0,442) \text{ m}$; $\omega_{AB} = 2,93 \text{ rad/s}$ y $v_B = 1,293 \text{ m/s}$, idénticos a los del Problema 4.4.

Cuándo conviene el CIR

Si el problema **solo** pide velocidades, el CIR es mucho más rápido (dos distancias y una división, sin vectores). Si pide aceleraciones, olvídate del CIR y ve directo a la ecuación vectorial. En el parcial, usar el CIR como *verificación* de tu respuesta de velocidad te cuesta un minuto y te salva de un error de signo.

Hoja de respuestas rápida — Taller 4

4.1 $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$; $\theta = 9,0 \text{ rad}$; $v = 2,40 \text{ m/s}$; $a_t = 0,80$; $a_n = 14,4$; $|a| = 14,42 \text{ m/s}^2$.

4.2 $\omega = 6,67 \text{ rad/s}$; $v_A = 4,0 \text{ m/s}$; $v_P = 0$; $v_D = 2,83 \text{ m/s}$ a 45° .

4.3 $\omega = 1,732 \text{ rad/s}$; $v_B = 1,732 \text{ m/s}$ ↓; CIR $(1,0; 1,732)$; $\alpha = 1,732 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 6,93 \text{ m/s}^2$ ↓.

4.4 $\omega_{AB} = 2,928 \text{ rad/s}$ (horaria); $v_B = 1,293 \text{ m/s}$ ←; $\alpha_{AB} = 15,45 \text{ rad/s}^2$; $a_B = 20,85 \text{ m/s}^2$ ←.

4.5 CIR $(0,7648; 0,4416) \text{ m}$; mismos ω_{AB} y v_B .