

TALLER 5

Uniones deslizantes: ejes móviles en rotación y aceleración de Coriolis

Semana del programa: Semana 5, Clase 1 (el último tema del Parcial 1) • **Tiempo sugerido:** 3 horas

Este es el tema que decide el parcial

En los parciales de 2020-II, 2021-II, 2022-I, 2022-II y 2024-II el **primer punto** fue exactamente esto: un pasador que se desliza dentro de una ranura, o un cilindro hidráulico que se estira mientras pivota. Si dominas este taller, dominas el punto que más pesa.

1. Lo que necesitas de este tema

Cuándo se usa un eje rotatorio

Cuando dos piezas están unidas por un **pasador que desliza en una ranura** (o un collarín que corre sobre una barra), los dos cuerpos comparten un punto *pero ese punto se mueve respecto a uno de ellos*. Ahí ya no sirve $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$: hay que montarse en el cuerpo que gira.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/O} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/O} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/O}) + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}}_{\text{Coriolis}} + \vec{a}_{rel}$$

donde $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del **marco que gira** (la ranura o la barra), y $\vec{v}_{rel}$, $\vec{a}_{rel}$ son la velocidad y la aceleración del pasador **vistas por alguien montado en la ranura** (siempre a lo largo de la ranura).

La versión en polares es la misma fórmula

Si pones el origen en el pivote y $\hat{e}_r$ a lo largo de la ranura, $\vec{v}_{rel} = \dot{r}\hat{e}_r$, $\vec{a}_{rel} = \ddot{r}\hat{e}_r$, $\Omega = \dot{\theta}$, $\alpha = \ddot{\theta}$, y la fórmula gigante se convierte en:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Es exactamente la fórmula polar del Taller 2. No es un tema nuevo: es el mismo, aplicado a mecanismos. Por eso muchos profesores resuelven estos parciales “en polares”.

Qué es físicamente el término de Coriolis

$2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}$ aparece **solo** si se cumplen *las dos* condiciones a la vez:

1. el marco está girando ($\Omega \neq 0$), **y**
2. el objeto se mueve respecto al marco ($v_{rel} \neq 0$).

Si caminas hacia el borde de un carrusel que gira, tu velocidad tangencial (Ωr) tiene que *aumentar* porque r crece. Ese aumento forzado es la aceleración de Coriolis. Es perpendicular a $\vec{v}_{rel}$, y suele ser el término **más grande de todos**.

Procedimiento de 6 pasos

1. Identifica **quién gira** (la ranura/barra: ese es el marco) y **quién desliza** (el pasador).
2. Pon el origen en el pivote del marco. Mide r y θ .
3. Escribe qué sabes del pasador *en el marco fijo*: si viene de otra manivela, $\vec{v}_P = \vec{\omega}_{man} \times \vec{r}_{P/pivote}$ y $\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$.
4. Proyecta $\vec{v}_P$ sobre $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$: la componente $\hat{e}_r$ es $\dot{r}$, la $\hat{e}_\theta$ es $r\dot{\theta}$. **Ahí salen $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$** .
5. Proyecta $\vec{a}_P$ sobre $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ e iguala a $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ y $(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$. **Ahí salen $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$** .
6. Interpreta: $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son la velocidad y aceleración angular *del brazo ranurado*; $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ son la velocidad y aceleración *de deslizamiento*.

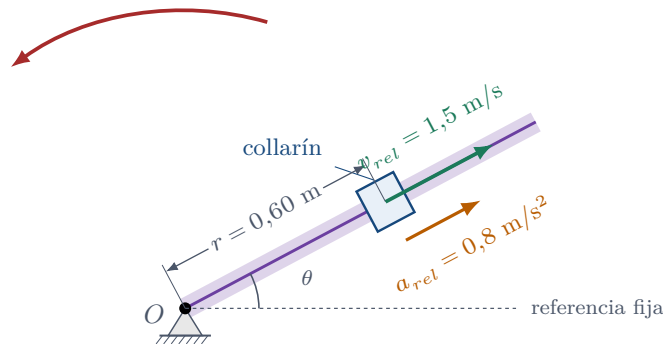
PARTE A — Enunciados

Problema 5.1 – Collarín sobre barra que gira (calentamiento)

Una barra gira en el plano horizontal alrededor de O con $\Omega = 4,0 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$, ambas antihorarias. Un collarín se desliza a lo largo de la barra alejándose de O con velocidad relativa $1,5 \text{ m/s}$ y aceleración relativa $0,8 \text{ m/s}^2$. En el instante en que el collarín está a $r = 0,60 \text{ m}$ de O , determine la velocidad y la aceleración absolutas del collarín, e indique cuánto vale el término de Coriolis.

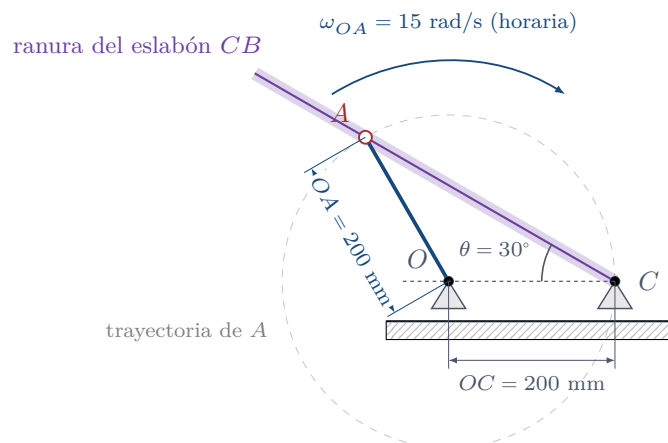
$$\Omega = 4,0 \text{ rad/s}, \quad \alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$$

(ambas antihorarias)



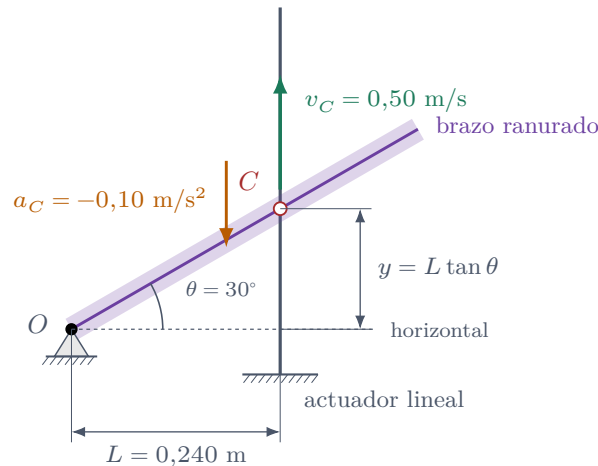
Problema 5.2 – Manivela y eslabón ranurado (réplica del Parcial 2022-II)

La manivela OA mide 200 mm y gira con velocidad angular constante de 15 rad/s . El pasador A se desliza dentro de la ranura del eslabón CB , que pivota en C , con $OC = 200 \text{ mm}$. Para la posición $\theta = 30^\circ$ determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ del eslabón ranurado, así como la velocidad y la aceleración de deslizamiento del pasador en la ranura.



Problema 5.3 – Actuador lineal y brazo ranurado (tipo Parcial 2024-II)

Un actuador lineal mueve un pasador C **verticalmente hacia arriba** con velocidad $v_C = 0,50$ m/s y desaceleración $a_C = -0,10$ m/s². El pasador se desliza en la ranura de un brazo que pivota en O , ubicado a una distancia horizontal $L = 0,240$ m de la línea del actuador. Para el instante en que el brazo forma $\theta = 30^\circ$ con la horizontal, determine $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ del brazo.

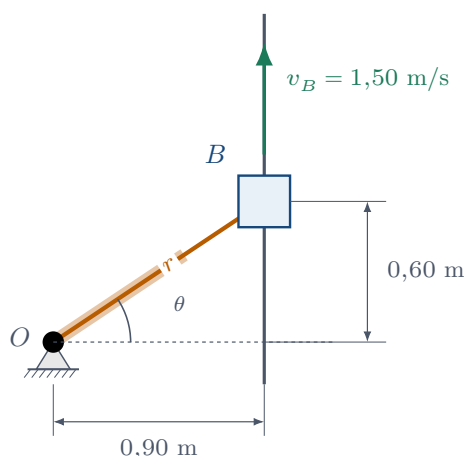


Sugerencia: la relación geométrica es $y = L \tan \theta$. Derive dos veces respecto al tiempo.

Problema 5.4 – Cilindro hidráulico que pivota (tipo Parcial 2020-II)

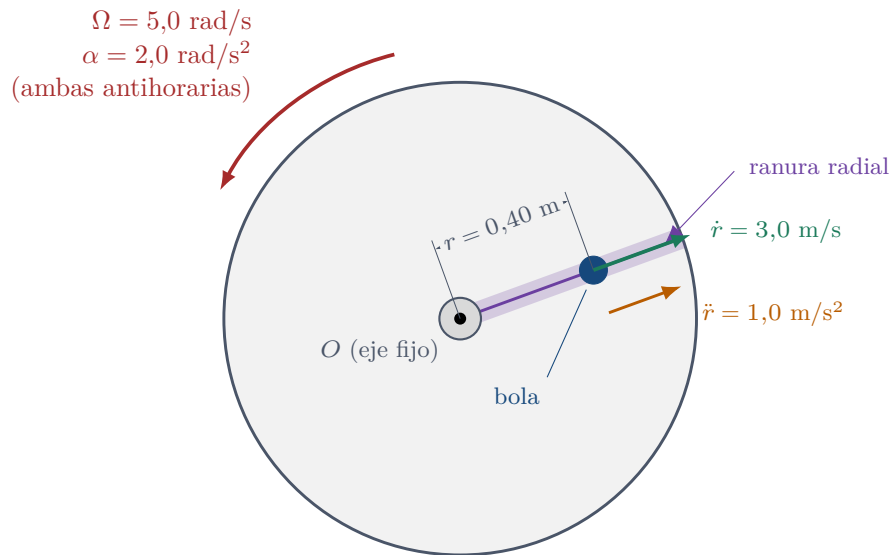
Un cilindro hidráulico pivota en O y su vástago está conectado a un bloque B que se desliza por una guía vertical con rapidez constante $v_B = 1,50$ m/s hacia arriba. En el instante mostrado, B está $0,90$ m a la derecha de O y $0,60$ m por encima de él. Determine:

- La rapidez con que se extiende el cilindro ($\dot{r}$) y su velocidad angular ($\dot{\theta}$).
- La aceleración de extensión ($\ddot{r}$) y la aceleración angular ($\ddot{\theta}$) del cilindro.



Problema 5.5 – Disco con ranura radial (Coriolis puro)

Un disco gira alrededor de su centro con $\Omega = 5,0 \text{ rad/s}$ y $\alpha = 2,0 \text{ rad/s}^2$, ambas antihorarias. Una bola se desliza por una ranura radial del disco con $\dot{r} = 3,0 \text{ m/s}$ y $\ddot{r} = 1,0 \text{ m/s}^2$, ambas hacia afuera. Cuando la bola está a $r = 0,40 \text{ m}$ del centro, determine su velocidad y aceleración absolutas, e identifique qué fracción de la aceleración total es de Coriolis.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 5.1

Ruta de solución

Aplicación directa de la fórmula grande. Pon $\hat{e}_r$ a lo largo de la barra (hacia afuera) y $\hat{e}_\theta$ perpendicular. Cada término de la fórmula se calcula por separado y al final se suman.

PASO 1 Velocidad

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{r}}_{\text{arrastre del giro}} + \underbrace{\vec{v}_{rel}}_{\text{deslizamiento}} = (4,0)(0,60) \hat{e}_\theta + 1,5 \hat{e}_r = 1,5 \hat{e}_r + 2,4 \hat{e}_\theta \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1,5^2 + 2,4^2} = 2,83 \text{ m/s}$$

PASO 2 Aceleración, término por término

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \times \vec{r} &= (2,0)(0,60) \hat{e}_\theta = 1,2 \hat{e}_\theta && \text{(el giro se acelera)} \\ \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= -\Omega^2 r \hat{e}_r = -(16)(0,60) \hat{e}_r = -9,6 \hat{e}_r && \text{(centrípeta)} \\ 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} &= 2(4,0)(1,5) \hat{e}_\theta = 12,0 \hat{e}_\theta && \text{(Coriolis)} \\ \vec{a}_{rel} &= 0,8 \hat{e}_r && \text{(acelera el deslizamiento)} \end{aligned}$$

PASO 3 Sumar

$$\vec{a} = (-9,6 + 0,8) \hat{e}_r + (1,2 + 12,0) \hat{e}_\theta = -8,8 \hat{e}_r + 13,2 \hat{e}_\theta \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{77,44 + 174,24} = 15,86 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 2,83 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 15,86 \text{ m/s}^2$. El término de Coriolis vale $12,0 \text{ m/s}^2$, o sea el **76%** de la magnitud total.

Cuidado

Si hubieras olvidado Coriolis, te habría dado $|\vec{a}| = \sqrt{8,8^2 + 1,2^2} = 8,88 \text{ m/s}^2$: casi la mitad del valor correcto. Ese es el tamaño del error que cuesta el punto completo en el parcial.

Problema 5.2

Ruta de solución

El pasador A pertenece a la manivela (por eso sabemos todo de su movimiento absoluto) y a la vez desliza en la ranura del eslabón. Estrategia: calcular $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$ desde la manivela, y luego **proyectarlas** sobre $\hat{e}_r$ (a lo largo de la ranura) y $\hat{e}_\theta$ (perpendicular a la ranura).

PASO 1 Geometría: hallar r

El triángulo OCA es isósceles ($OA = OC = 0,20 \text{ m}$). Por ley de cosenos, o simplemente proyectando, la distancia de C al pasador es:

$$r = 2(0,20) \cos \theta = 0,4 \cos \theta$$

En $\theta = 30^\circ$: $r = 0,4(0,8660) = 0,3464$ m.

PASO 2 Velocidad y aceleración absolutas del pasador (vienen de la manivela)

$$|\vec{v}_A| = \omega_{OA} \cdot OA = (15)(0,20) = 3,0 \text{ m/s} \quad (\text{perpendicular a } OA)$$

$$|\vec{a}_A| = \omega_{OA}^2 \cdot OA = (225)(0,20) = 45,0 \text{ m/s}^2 \quad (\text{dirigida de } A \text{ hacia } O)$$

(No hay componente tangencial porque ω_{OA} es constante.)

PASO 3 Proyectar la velocidad sobre la ranura

Por la geometría del triángulo isósceles, $\vec{v}_A$ forma un ángulo θ con la dirección perpendicular a la ranura, de modo que:

$$v_r = \dot{r} = -|\vec{v}_A| \sin \theta = -3,0(0,5) = -1,50 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = |\vec{v}_A| \cos \theta = 3,0(0,8660) = 2,598 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2,598}{0,3464} = 7,50 \text{ rad/s}$$

PASO 4 Proyectar la aceleración sobre la ranura

$$a_r = -|\vec{a}_A| \cos \theta = -45(0,8660) = -38,97 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = -|\vec{a}_A| \sin \theta = -45(0,5) = -22,50 \text{ m/s}^2$$

PASO 5 Despejar $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$ de las fórmulas polares

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \implies \ddot{r} = -38,97 + (0,3464)(7,50)^2 = -38,97 + 19,49 = -19,49 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \implies -22,50 = 0,3464\ddot{\theta} + 2(-1,50)(7,50)$$

$$-22,50 = 0,3464\ddot{\theta} - 22,50 \implies \boxed{\ddot{\theta} = 0}$$

Respuesta: $\dot{\theta} = 7,50$ rad/s; $\ddot{\theta} = 0$; velocidad de deslizamiento $\dot{r} = -1,50$ m/s (el pasador se acerca a C); aceleración de deslizamiento $\ddot{r} = -19,49$ m/s².

Verificación por el otro camino

Como $r = 0,4 \cos \theta$, derivando directamente:

$$\dot{r} = -0,4 \sin \theta \dot{\theta} = -0,4(0,5)(7,5) = -1,50 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

$$\ddot{r} = -0,4 \cos \theta \dot{\theta}^2 = -0,4(0,866)(56,25) = -19,49 \text{ m/s}^2 \quad \checkmark$$

Dos métodos independientes, el mismo número. Ese $\ddot{\theta} = 0$ no es casualidad: cuando $OA = OC$ y la manivela gira a velocidad constante, se demuestra que el eslabón también gira a velocidad angular constante ($\theta = \omega_{OA}t/2$).

Problema 5.3

Ruta de solución

Aquí ni siquiera hace falta la fórmula vectorial: hay una relación geométrica limpia entre y (lo que sube el actuador) y θ (lo que gira el brazo). Se deriva dos veces y listo. **Este es el método más rápido cuando puedes escribir una ecuación escalar.**

PASO 1 Relación geométrica

$$\tan \theta = \frac{y}{L} \Rightarrow y = L \tan \theta = 0,240 \tan \theta$$

PASO 2 Primera derivada

$$\dot{y} = L \sec^2 \theta \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{y} \cos^2 \theta}{L}$$

Con $\dot{y} = 0,50 \text{ m/s}$ y $\cos^2 30^\circ = 0,75$:

$$\dot{\theta} = \frac{(0,50)(0,75)}{0,240} = 1,5625 \text{ rad/s}$$

PASO 3 Segunda derivada

Derivando $\dot{y} = L \sec^2 \theta \dot{\theta}$ con la regla del producto (y $\frac{d}{dt} \sec^2 \theta = 2 \sec^2 \theta \tan \theta \dot{\theta}$):

$$\ddot{y} = L (\sec^2 \theta \ddot{\theta} + 2 \sec^2 \theta \tan \theta \dot{\theta}^2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y} \cos^2 \theta}{L} - 2 \tan \theta \dot{\theta}^2$$

PASO 4 Reemplazar

$$\ddot{\theta} = \frac{(-0,10)(0,75)}{0,240} - 2(0,5774)(1,5625)^2 = -0,3125 - 2,819 = -3,13 \text{ rad/s}^2$$

Respuesta: $\dot{\theta} = 1,56 \text{ rad/s}$ (antihoraria); $\ddot{\theta} = -3,13 \text{ rad/s}^2$ (frenando el giro).

Chequeo de sentido común

El segundo término $(-2,82)$ es **nueve veces mayor** que el primero $(-0,31)$. O sea: aunque el actuador casi no está desacelerando, el brazo sí frena fuerte su giro, y eso viene de la *geometría* ($\tan \theta$ crece cada vez más rápido). Si tu respuesta hubiera dado casi cero, es señal de que olvidaste el término $2 \tan \theta \dot{\theta}^2$.

Problema 5.4

Ruta de solución

Aquí el “pasador” es el bloque B , cuya velocidad absoluta conocemos por completo (sube en línea recta). Lo único que hay que hacer es **proyectarla** sobre la dirección del cilindro ($\hat{e}_r$) y la perpendicular ($\hat{e}_\theta$).

PASO 1 Geometría

$$r = \sqrt{0,90^2 + 0,60^2} = 1,0817 \text{ m}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{0,60}{0,90}\right) = 33,69^\circ$$

$$\hat{e}_r = (\cos 33,69^\circ, \sin 33,69^\circ) = (0,8321; 0,5547), \quad \hat{e}_\theta = (-0,5547; 0,8321)$$

PASO 2 Proyectar la velocidad $\vec{v}_B = (0; 1,50) \text{ m/s}$

$$\dot{r} = \vec{v}_B \cdot \hat{e}_r = (1,50)(0,5547) = 0,832 \text{ m/s}$$

$$r\dot{\theta} = \vec{v}_B \cdot \hat{e}_\theta = (1,50)(0,8321) = 1,248 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1,248}{1,0817} = 1,154 \text{ rad/s}$$

PASO 3 Proyectar la aceleración $\vec{a}_B = \vec{0}$

Como v_B es constante, $\vec{a}_B = 0$, así que **las dos componentes polares de la aceleración son cero**:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 = (1,0817)(1,154)^2 = 1,440 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = \frac{-2(0,832)(1,154)}{1,0817} = -1,775 \text{ rad/s}^2$$

Respuesta: (a) $\dot{r} = 0,832 \text{ m/s}$ (se extiende); $\dot{\theta} = 1,154 \text{ rad/s}$. (b) $\ddot{r} = 1,440 \text{ m/s}^2$; $\ddot{\theta} = -1,775 \text{ rad/s}^2$.

Lo importante de este problema

El bloque va a **velocidad constante** (aceleración cero) y sin embargo el cilindro tiene aceleración de extensión y aceleración angular, ¡y ninguna es cero! La razón: a_r y a_θ valen cero *como suma*, pero cada término individual no. El $\ddot{r}$ existe para cancelar la centrípeta, y el $\ddot{\theta}$ existe para cancelar el Coriolis. Entender esto es entender el tema completo.

Problema 5.5**PASO 1 Velocidad**

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\Omega\hat{e}_\theta = 3,0\hat{e}_r + (0,40)(5,0)\hat{e}_\theta = 3,0\hat{e}_r + 2,0\hat{e}_\theta \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4} = 3,61 \text{ m/s}$$

PASO 2 Aceleración, término por término

$$\text{Relativa: } \ddot{r} = 1,0\hat{e}_r$$

$$\text{Centrípeta: } -r\Omega^2 = -(0,40)(25) = -10,0\hat{e}_r$$

$$\text{Angular: } r\alpha = (0,40)(2,0) = 0,80\hat{e}_\theta$$

$$\text{Coriolis: } 2\dot{r}\Omega = 2(3,0)(5,0) = 30,0\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (1,0 - 10,0)\hat{e}_r + (0,80 + 30,0)\hat{e}_\theta = -9,0\hat{e}_r + 30,8\hat{e}_\theta \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{81 + 948,6} = 32,09 \text{ m/s}^2$$

Respuesta: $|\vec{v}| = 3,61 \text{ m/s}$; $|\vec{a}| = 32,09 \text{ m/s}^2$. El término de Coriolis ($30,0 \text{ m/s}^2$) representa el **94%** de la magnitud total.

Chequeo de sentido común

En este problema Coriolis se come casi toda la aceleración. Es el mismo efecto que hace que los huracanes giren y que sea difícil caminar en línea recta sobre un carrusel. Si alguna vez resuelves un problema con ranuras y te da una aceleración chiquita, sospecha inmediatamente que olvidaste el $2\dot{r}\dot{\theta}$.

Hoja de respuestas rápida — Taller 5

5.1 $\vec{v} = 1,5\hat{e}_r + 2,4\hat{e}_\theta$, $|v| = 2,83 \text{ m/s}$; $\vec{a} = -8,8\hat{e}_r + 13,2\hat{e}_\theta$, $|a| = 15,86 \text{ m/s}^2$; Coriolis = 12,0.

5.2 $r = 0,3464 \text{ m}$; $\dot{\theta} = 7,50 \text{ rad/s}$; $\ddot{\theta} = 0$; $\dot{r} = -1,50 \text{ m/s}$; $\ddot{r} = -19,49 \text{ m/s}^2$.

5.3 $\dot{\theta} = 1,5625 \text{ rad/s}$; $\ddot{\theta} = -3,13 \text{ rad/s}^2$. **5.4** $\dot{r} = 0,832$; $\dot{\theta} = 1,154$; $\ddot{r} = 1,440$; $\ddot{\theta} = -1,775$.

5.5 $|v| = 3,61 \text{ m/s}$; $\vec{a} = -9,0\hat{e}_r + 30,8\hat{e}_\theta$, $|a| = 32,09 \text{ m/s}^2$; Coriolis = 30,0.