

PLAN DE ESTUDIO

Parcial 1: qué cae, en qué orden estudiarlo y con qué verificarte

Semana del programa: Semanas 1 a 5 • Tiempo sugerido: 10 días

1. Qué cae exactamente en el Parcial 1

Lo que dice el programa

El programa del curso ubica el **Parcial 1 en la semana 5** y lo delimita con una frase: “*hasta sistemas equivalentes*”. Eso significa que entra todo lo de las semanas 1 a 3 y **no entra** equilibrio, ni diagramas de cuerpo libre, ni apoyos, ni armaduras. Si estás repasando reacciones en apoyos para este parcial, estás perdiendo el tiempo.

Sem.	Contenido que entra
1	Fundamentos de mecánica vectorial. Fuerzas, representación, componentes. Producto vectorial. Momento de una fuerza.
2	Producto escalar. Momento alrededor de un eje. Teorema de Varignon. Par o cupla. Momento del par.
3	Traslado de fuerzas. Sistemas equivalentes. Casos particulares. Torsor.

Lo que dicen los parciales reales

Se revisaron los parciales 1 de 2022-II y 2023-I. Los dos tienen **tres puntos**, todos en el espacio (3D), y el patrón se repite casi sin variación:

Punto	Qué piden	Taller donde está entrenado
1	Fuerza de un cable como vector, ángulos directores, momento respecto a un punto y respecto a un eje.	Taller 0 (completo) y Taller 1 (problemas 1.2 y 1.6)
2	Momento de una fuerza respecto a una línea definida por dos puntos.	Taller 1 (problemas 1.3 y 1.4)
3	Reducción a llave de torsión: paso del torsor y punto donde el eje corta un plano coordenado.	Taller 3 (problemas 3.4, 3.5 y 3.6)

El punto 3 fue torsor en **los dos** parciales revisados. No es un tema que “puede caer”: es el tema que cae.

Tres detalles de forma que este profesor sí exige

1. **Ejes:** en todos los enunciados el eje z va hacia arriba, el y hacia la derecha y el x hacia el observador. Si dibujas con y arriba (como el libro de Beer) te vas a confundir leyendo la figura del examen.
2. **Unidades mixtas:** los parciales usan libras y pies en un punto, y newtons y milímetros en otro. Revisa las unidades del enunciado *antes* de escribir el primer número, y arrastra las unidades en cada línea.
3. **Respuestas con muchos decimales:** las respuestas reales no son redondas (207,407 N · mm, $P(217,5; 0; 23,6)$ mm). Que tu resultado quede feo no significa que esté mal.

2. Calendario de 10 días

Cómo usar este calendario

Está pensado para diez días antes del parcial, con sesiones de dos a tres horas. Si tienes menos días, junta los días 1 y 2 y los días 8 y 9, pero **no elimines el día 7**: el tórsor es el que decide el tercio de la nota.

Cada día tiene una sola meta. Si terminas antes, no adelantes: descansa. Si no alcanzas, tampoco arrastres: pasa al siguiente y vuelve el día 9.

Día	Qué haces	Cómo sabes que quedó
1	Taller 0, Parte A completa, sin mirar la Parte B.	Resolviste 0.1, 0.3 y 0.6 sin dudar del orden de la resta en $\vec{r}_{A \rightarrow B}$.
2	Taller 0, Parte B: corriges lo que falló. Rehaces solo los que te salieron mal.	La identidad $\sum \cos^2 \theta = 1$ te sale automática como verificación.
3	Taller 1, problemas 1.1 a 1.3.	Escribes las tres componentes del producto cruz sin volver a mirar la fórmula.
4	Taller 1, problemas 1.4 a 1.6 y su Parte B.	Distingues sin pensarlo momento respecto a un <i>punto</i> (vector) de momento respecto a un <i>eje</i> (número).
5	Taller 2 completo.	Trasladas una fuerza a otro punto y sabes por qué aparece un par y por qué el par que ya estaba no cambia.
6	Simulacro 1 con cronómetro, sin apuntes. Luego calificas con el solucionario.	Sabes en cuál de los tres puntos se te va el tiempo.
7	Taller 3, problemas 3.1 a 3.4. Día del tórsor.	Recitas la secuencia de ocho pasos del final del Taller 3 sin mirar.
8	Taller 3, problemas 3.5 y 3.6.	La verificación $\vec{M}_{\text{tórser}} + \vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$ te cierra sola.
9	Simulacro 2 con cronómetro. Repasas solo los errores del simulacro 1.	Terminas dentro del tiempo y los tres puntos cierran con su verificación.
10	Simulacro 3 o 4 (el que prefieras) y lectura de la hoja de fórmulas. Nada nuevo.	Duermes. En serio: el día antes del parcial no se aprende, se consolida.

La regla de los dos intentos

Cuando un problema no te salga, intenta dos veces de verdad (con papel, sin mirar) antes de abrir la Parte B. Y cuando la abras, no la leas completa: lee solo la caja **Ruta de solución** y vuelve a intentar. La ruta te da la estrategia sin darte las cuentas, que es exactamente lo que te falta cuando te trabas.

Cómo repartir los 100 minutos del parcial

Con tres puntos y el tiempo típico del examen:

- **Primeros 5 minutos:** lee los tres puntos y escribe en una esquina de la hoja las fórmulas del producto cruz por componentes y la secuencia del tórsor. Todavía las tienes frescas.
- **Punto 1 (25 min):** es el más mecánico. Hazlo primero para asegurar puntos.
- **Punto 2 (25 min):** momento respecto a un eje. Busca el $\vec{r}$ con más ceros.
- **Punto 3 (35 min):** el tórsor. Es el que más pasos tiene; necesita tiempo limpio.
- **Últimos 10 minutos:** verificaciones. $|\vec{F}|$ debe dar la magnitud del enunciado, $\vec{M} \cdot \vec{F}$ debe dar cero, y el tórsor debe reconstruir $\vec{M}_O$.

Nunca dejes el punto 3 para el final con cinco minutos: es un tercio de la nota y no se improvisa.

3. Hoja de fórmulas — Parcial 1

Vectores y direcciones

$$\vec{r}_{A \rightarrow B} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \quad \hat{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{r}_{A \rightarrow B}}{|\vec{r}_{A \rightarrow B}|} \quad \vec{F} = F \hat{\lambda}_{AB}$$

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

Fuerza dada por elevación ϕ sobre el plano xy y azimut ψ desde el eje x :

$$F_z = F \sin \phi, \quad F_h = F \cos \phi, \quad F_x = F_h \cos \psi, \quad F_y = F_h \sin \psi$$

Producto punto: ángulos y proyecciones

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \quad F_\ell = \vec{F} \cdot \hat{\lambda}_\ell \quad (\text{escalar, con signo})$$

Producto cruz y momentos

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad \begin{aligned} M_x &= r_y F_z - r_z F_y \\ M_y &= r_z F_x - r_x F_z \\ M_z &= r_x F_y - r_y F_x \end{aligned} \quad (2D: M_O = r_x F_y - r_y F_x)$$

$$M_\ell = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{\lambda}_\ell = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad d = \frac{|\vec{M}_O|}{|\vec{F}|}$$

$\vec{r}$ va *desde* el punto (o cualquier punto del eje) *hasta* cualquier punto de la línea de acción. Escoge el que tenga más ceros.

Pares y traslado

Par: $\vec{M} = \vec{r}_{B \rightarrow A} \times \vec{F}$, $M = F d$, independiente del punto.

$$\vec{F} \text{ en } A \equiv \vec{F} \text{ en } B + \vec{M}_B = \vec{r}_{B \rightarrow A} \times \vec{F}$$

Un par que ya existía se copia tal cual al nuevo punto: no genera nada.

Reducción de un sistema y torsor

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \quad \vec{M}_O = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum \vec{M}_{\text{pares}}$$

La prueba: $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow$ una sola fuerza; $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0 \Rightarrow$ torsor.

$$\hat{\lambda} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \quad M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda} \quad p = \frac{M_{\parallel}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}$$

$$\vec{M}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda} \quad \vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}} \quad \boxed{\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_{\perp}}$$

Para el corte con un plano, fija la coordenada de ese plano ($y = 0$ para el plano xz) y resuelve. Queda una ecuación de sobra: úsala como verificación.

Las cinco verificaciones que caben en un minuto

1. $|\vec{F}|$ calculada debe dar la magnitud del enunciado.
2. $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$.
3. $\vec{M}_O \cdot \vec{F} = 0$ y $\vec{M}_O \cdot \vec{r} = 0$ (el momento es perpendicular a los dos).
4. $|M_{\ell}| \leq |\vec{M}_O|$: una proyección nunca supera al vector proyectado.
5. Torsor: $\vec{M}_{\text{torsor}} + \vec{r} \times \vec{R}$ tiene que devolver $\vec{M}_O$.

Los errores que más puntos cuestan, en orden

1. Restar al revés: $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ en vez de $\vec{r}_{A \rightarrow B}$. Cambia el sentido de todo lo que sigue.
2. Dividir entre la magnitud de la fuerza en vez de entre la longitud del cable.
3. Entregar un vector cuando piden momento respecto a un eje (o al revés).
4. Olvidar los pares aplicados al sumar $\vec{M}_O$.
5. Confundir $M_{\parallel}$ (en $N \cdot m$) con el paso p (en metros).
6. Buscar el eje del torsi con $\vec{M}_O$ en vez de con $\vec{M}_{\perp}$.

TALLER 0

Vectores en el espacio: componentes, ángulos directores y producto punto

Semana del programa: Semana 1, clases 1 y 2 • Tiempo sugerido: 3 horas

1. Lo que necesitas de este tema

La única idea del taller

Una fuerza en el espacio casi nunca te la dan en componentes. Te dan **por dónde pasa** (dos puntos, un cable, una barra) y **cuánto vale** (la magnitud). Convertir eso en $\vec{\mathbf{F}} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ es el paso que abre todos los demás temas del curso.

La receta es siempre la misma, en tres movimientos:

$$\vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \quad \hat{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B}}{|\vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B}|} \quad \boxed{\vec{\mathbf{F}} = F \hat{\lambda}_{AB}}$$

El vector $\hat{\lambda}_{AB}$ es *solo dirección*: su magnitud vale 1 y no tiene unidades. La magnitud F es *solo tamaño*. El producto de los dos es la fuerza completa.

Ángulos directores

Son los tres ángulos que la fuerza forma con los ejes *positivos* x , y y z :

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

y siempre, sin excepción, se cumple la identidad que te sirve de chequeo y de herramienta:

$$\boxed{\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1}$$

Los tres cosenos directores son exactamente las componentes de $\hat{\lambda}$. Por eso $\hat{\lambda} = \cos \theta_x \hat{i} + \cos \theta_y \hat{j} + \cos \theta_z \hat{k}$.

Producto punto: la máquina de medir ángulos y proyecciones

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{\mathbf{A}}| |\vec{\mathbf{B}}| \cos \theta$$

De ahí salen las dos cosas que vas a usar todo el semestre:

- **Ángulo entre dos líneas:** $\cos \theta = \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{|\vec{\mathbf{A}}| |\vec{\mathbf{B}}|}$
- **Proyección de una fuerza sobre una línea:** $F_\ell = \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\lambda}_\ell$ (escalar, con signo)

El resultado del producto punto es un **número**, no un vector. Si te queda un vector, te equivocaste de producto.

Cómo saber cuál producto usar

Pregúntate qué quieres de respuesta. ¿Un número (un ángulo, una proyección, un momento respecto a un eje)? Producto punto. ¿Un vector perpendicular a otros dos (un momento respecto a un punto)? Producto cruz. Esa pregunta te ahorra la mitad de los errores del parcial.

El error que más cuesta puntos en el punto 1 del parcial

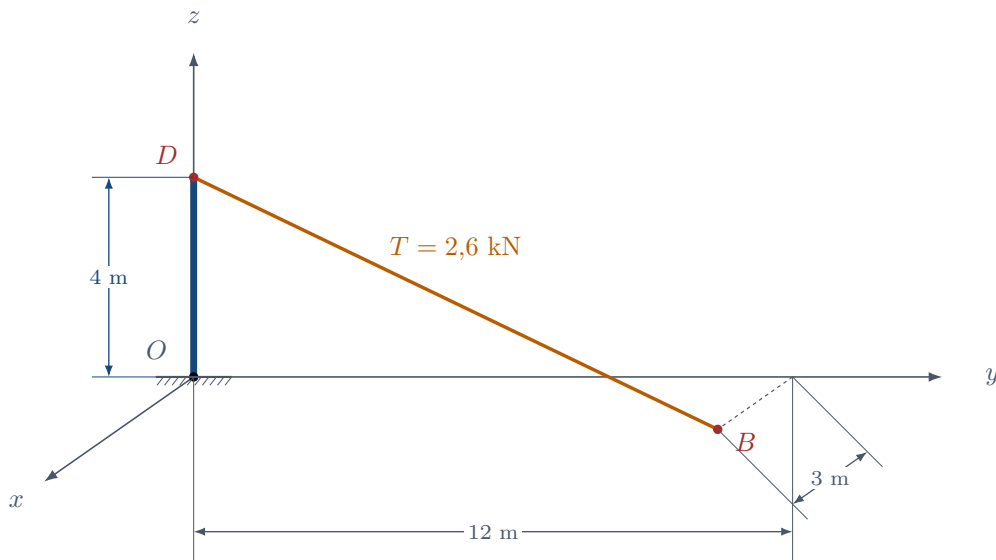
Dividir entre la magnitud *equivocada*. En $\vec{\mathbf{F}} = F \frac{\vec{\mathbf{r}}_{AB}}{|\vec{\mathbf{r}}_{AB}|}$, el denominador es la longitud del **cable** ($|\vec{\mathbf{r}}_{AB}|$), no la magnitud de la fuerza. Si al final $|\vec{\mathbf{F}}|$ no te da exactamente la magnitud que te dieron en el enunciado, te equivocaste en ese paso. Siempre compruébalo.

PARTE A — Enunciados

Problema 0.1 — Cable tensor de un poste

El poste OD de la figura mide 4 m de alto y está sostenido por un cable que va desde el tope D hasta el anclaje B en el piso. La tensión en el cable es de 2,6 kN.

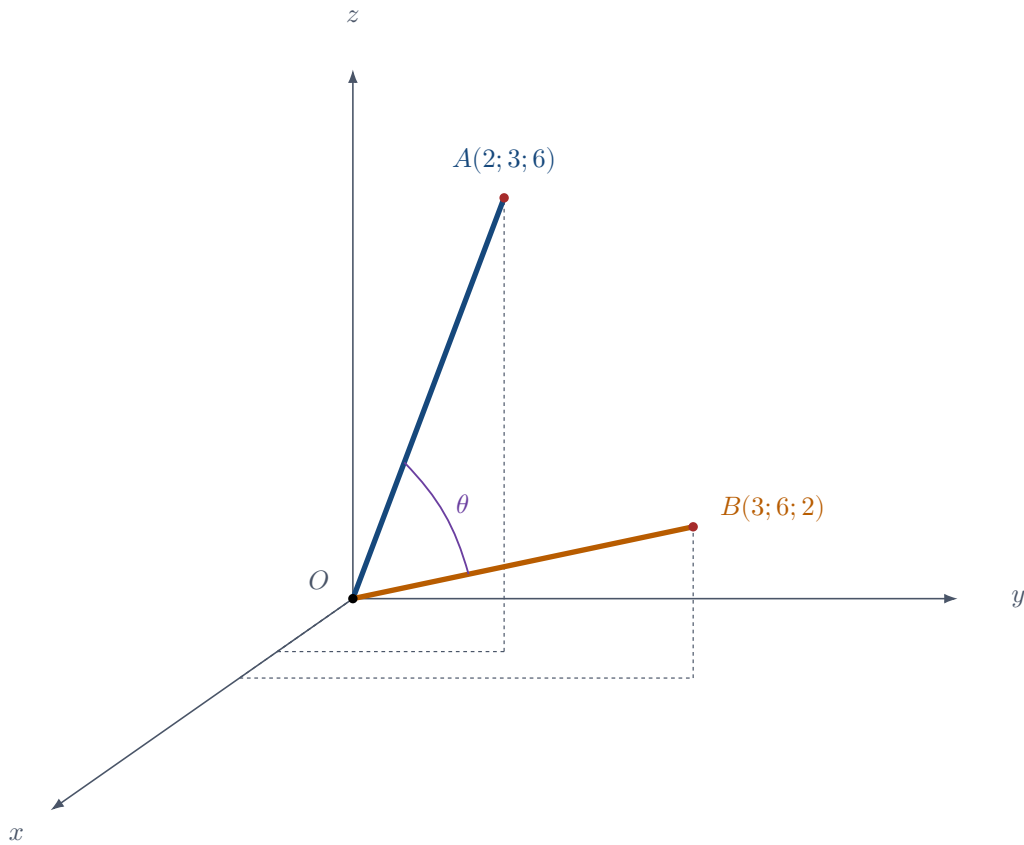
- (a) Escribe como vector la fuerza que el cable ejerce sobre el poste en D .
- (b) Determina los ángulos directores de esa fuerza respecto a los ejes positivos x , y y z .



Problema 0.2 — Ángulo entre dos tuberías

De un nodo O salen dos tuberías rectas: la primera termina en $A(2; 3; 6)$ m y la segunda en $B(3; 6; 2)$ m.

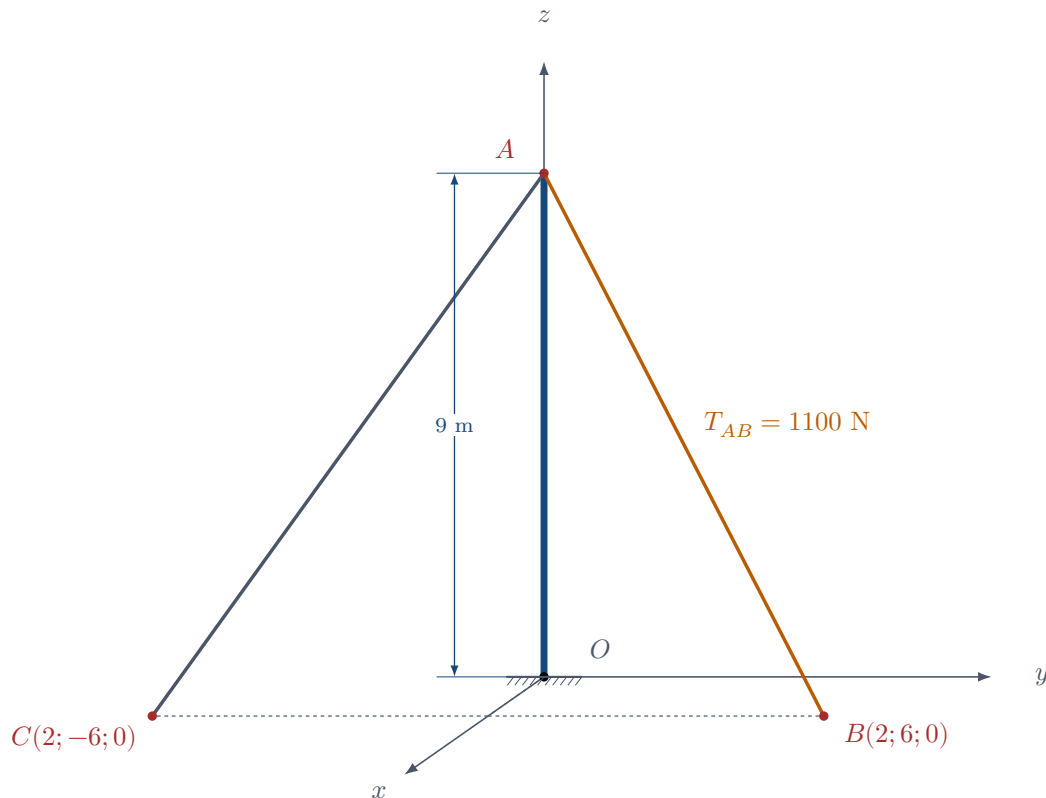
- (a) Determina el ángulo que forman las tuberías OA y OB .
- (b) Determina cuánto mide la proyección del tramo OA sobre la dirección OB .



Problema 0.3 — Proyección de la fuerza de un cable sobre otro

La antena vertical OA mide 9 m y está sostenida por dos cables anclados en el piso: AB y AC , con $B(2; 6; 0)$ m y $C(2; -6; 0)$ m. La tensión en el cable AB es de 1100 N.

- Escribe como vector la fuerza que el cable AB ejerce en A .
- Determina la proyección de esa fuerza sobre la línea AC .
- Determina el ángulo que forman los dos cables.

**Problema 0.4 — Fuerzas dadas por sus ángulos directores**

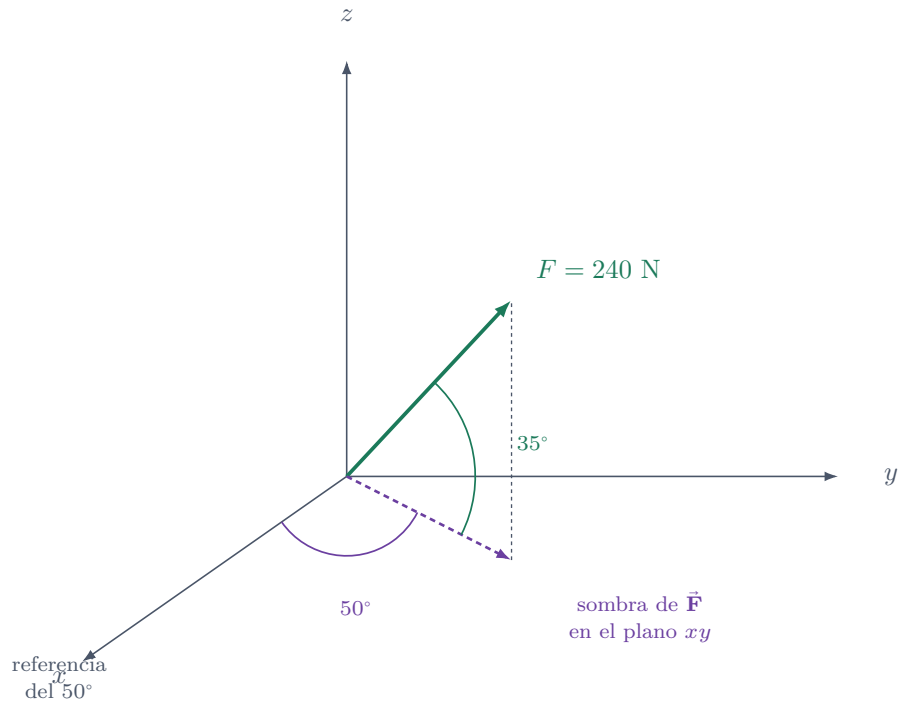
Sobre el punto O actúan dos fuerzas:

- $\vec{F}_1$, de magnitud 900 N, con $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$ y θ_z obtuso.
- $\vec{F}_2$, de magnitud 600 N, con cosenos directores $(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

- Determina θ_z de $\vec{F}_1$ y escribe $\vec{F}_1$ en componentes.
- Determina la resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, su magnitud y sus ángulos directores.

Problema 0.5 — Fuerza definida por dos ángulos

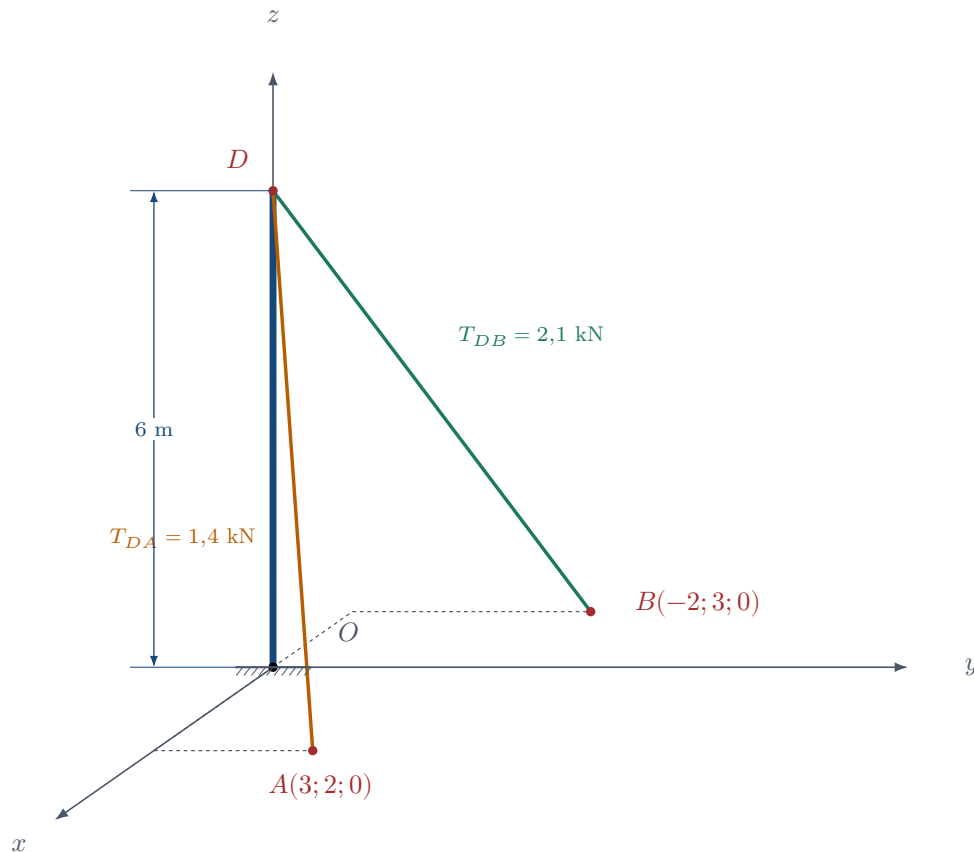
Una fuerza de 240 N actúa sobre el brazo AB . La línea de acción forma 35° con el plano horizontal xy , y su sombra sobre ese plano forma 50° con el eje x . Determina las tres componentes de la fuerza y sus ángulos directores.



Problema 0.6 — Nivel parcial: torre con dos tensores

La torre OD mide 6 m y está tensada por dos cables que salen de su tope D hacia los anclajes $A(3; 2; 0)$ m y $B(-2; 3; 0)$ m. Las tensiones valen $T_{DA} = 1,4$ kN y $T_{DB} = 2,1$ kN.

- Escribe las dos fuerzas como vectores.
- Determina la resultante que los cables ejercen sobre D , su magnitud y sus ángulos directores.
- Determina la proyección de esa resultante sobre el eje de la torre, en el sentido $D \rightarrow O$.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 0.1 — Cable tensor de un poste

Ruta de solución

La fuerza va por el cable, así que su dirección es la del segmento $D \rightarrow B$. Primero armo el vector que va de D a B restando coordenadas, luego lo vuelvo unitario dividiéndolo entre su propia longitud, y por último lo multiplico por los 2,6 kN. Con las tres componentes ya puedo sacar los ángulos directores dividiendo cada una entre 2,6.

PASO 1 Escribe las coordenadas de los dos extremos del cable

El cable arranca en el tope del poste y termina en el anclaje:

$$D(0; 0; 4) \text{ m} \quad B(3; 12; 0) \text{ m}$$

El origen O está en la base del poste, el eje z sube por el poste, el eje y va hacia la derecha y el eje x hacia el observador.

PASO 2 Arma el vector de posición $D \rightarrow B$

Siempre en el orden *llegada menos salida*, porque la fuerza va del poste hacia el anclaje:

$$\vec{r}_{D \rightarrow B} = (3 - 0)\hat{i} + (12 - 0)\hat{j} + (0 - 4)\hat{k} = 3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k} \quad [\text{m}]$$

La componente z sale negativa porque el cable *baja*: de $z = 4$ a $z = 0$.

PASO 3 Calcula la longitud del cable

$$|\vec{r}_{D \rightarrow B}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

PASO 4 Construye el vector unitario

$$\hat{\lambda}_{DB} = \frac{3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}}{13} = 0,2308\hat{i} + 0,9231\hat{j} - 0,3077\hat{k}$$

Este vector no tiene unidades y su magnitud es 1. Compruébalo: $\sqrt{0,2308^2 + 0,9231^2 + 0,3077^2} = 1,000$.

PASO 5 Multiplica por la magnitud de la tensión

$$\vec{T} = 2,6 \text{ kN} \cdot \hat{\lambda}_{DB} = \frac{2,6}{13} (3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}) = 0,2 (3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{T} = 0,6\hat{i} + 2,4\hat{j} - 0,8\hat{k} \quad [\text{kN}]}$$

El atajo que ahorra tiempo en el parcial

Fíjate en el factor $\frac{2,6}{13} = 0,2$. Cuando la magnitud y la longitud tienen divisores comunes, no calcules el unitario con decimales: multiplica el vector entero por la fracción. Menos decimales, menos errores de redondeo, y las componentes salen exactas.

PASO 6 Ángulos directores

Cada coseno director es la componente dividida entre la magnitud total (2,6 kN):

$$\cos \theta_x = \frac{0,6}{2,6} = 0,2308 \quad \cos \theta_y = \frac{2,4}{2,6} = 0,9231 \quad \cos \theta_z = \frac{-0,8}{2,6} = -0,3077$$

$$\theta_x = 76,66^\circ \quad \theta_y = 22,62^\circ \quad \theta_z = 107,92^\circ$$

Respuesta: $\vec{T} = 0,6\hat{i} + 2,4\hat{j} - 0,8\hat{k}$ kN, con $\theta_x = 76,66^\circ$, $\theta_y = 22,62^\circ$ y $\theta_z = 107,92^\circ$. El ángulo θ_z es obtuso porque la fuerza jala hacia abajo: el cable tira del tope del poste hacia el piso, no hacia el cielo.

El error concreto de este problema

Escribir $\vec{r}_{B \rightarrow D}$ en vez de $\vec{r}_{D \rightarrow B}$. Los dos vectores tienen la misma longitud y la misma línea, pero **sentido opuesto**: te saldría $\vec{T} = -0,6\hat{i} - 2,4\hat{j} + 0,8\hat{k}$, que representa un cable *empujando* el poste hacia arriba. Un cable nunca empuja. Pregúntate siempre: ¿hacia dónde jala? Ese es el orden correcto de la resta.

Chequeo de sentido común

Dos comprobaciones de diez segundos:

1. $|\vec{T}| = \sqrt{0,6^2 + 2,4^2 + 0,8^2} = \sqrt{0,36 + 5,76 + 0,64} = \sqrt{6,76} = 2,6$ kN. Coincide con el dato. Si no coincidiera, el error está en el paso 4.
2. $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 0,0533 + 0,8521 + 0,0947 = 1,000$. ✓

Problema 0.2 — Ángulo entre dos tuberías

Ruta de solución

Como el nodo está en el origen, los vectores de las dos tuberías son directamente las coordenadas de A y de B . El producto punto me da $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$; como puedo calcular las tres cosas menos θ , despejo el coseno. Para la proyección no necesito el ángulo: basta dividir el producto punto entre la magnitud de aquello *sobre lo que* proyecto.

PASO 1 Escribe los dos vectores

$$\vec{r}_{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m} \quad \vec{r}_{OB} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} \text{ m}$$

PASO 2 Calcula las dos magnitudes

$$|\vec{r}_{OA}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \text{ m} \quad |\vec{r}_{OB}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7 \text{ m}$$

PASO 3 Calcula el producto punto

Componente por componente, y se suman los tres productos:

$$\vec{r}_{OA} \cdot \vec{r}_{OB} = (2)(3) + (3)(6) + (6)(2) = 6 + 18 + 12 = 36 \text{ m}^2$$

PASO 4 Despeja el ángulo

$$\cos \theta = \frac{\vec{r}_{OA} \cdot \vec{r}_{OB}}{|\vec{r}_{OA}||\vec{r}_{OB}|} = \frac{36}{(7)(7)} = \frac{36}{49} = 0,7347 \quad \Rightarrow \quad \theta = 42,72^\circ$$

PASO 5 Proyección de OA sobre la dirección OB

La proyección es la sombra de un vector sobre la línea del otro. Se obtiene con el mismo producto punto, pero dividiendo solo entre la magnitud de OB :

$$(\text{proy})_{OB} = \vec{r}_{OA} \cdot \hat{\lambda}_{OB} = \vec{r}_{OA} \cdot \frac{\vec{r}_{OB}}{|\vec{r}_{OB}|} = \frac{36}{7} = 5,143 \text{ m}$$

Respuesta: Las tuberías forman $\theta = 42,72^\circ$ y la proyección de OA sobre OB mide 5,143 m. Que la proyección (5,14 m) sea menor que $|OA| = 7 \text{ m}$ significa que la tubería OA se “acuesta” sobre OB perdiendo longitud aparente: es la sombra de una vara inclinada.

Dividir entre lo que no es

Para el **ángulo** se divide entre las *dos* magnitudes. Para la **proyección** se divide entre *una sola*: la de la línea sobre la que proyectas. Mucha gente escribe $36/49$ para la proyección y entrega 0,73 m, que ni siquiera tiene unidades de longitud correctas. Mira las unidades: $\text{m}^2/\text{m} = \text{m}$. Una división.

Chequeo de sentido común

La proyección nunca puede ser mayor que la magnitud del vector proyectado: $5,143 \text{ m} \leq 7 \text{ m}$.
✓ Además, como $\theta < 90^\circ$, la proyección tiene que salir positiva, y salió positiva. Si te hubiera dado negativa con un ángulo agudo, hay un error de signo en alguna componente.

Problema 0.3 — Proyección de la fuerza de un cable sobre otro

Ruta de solución

Tres preguntas, un solo montaje. Escribo los vectores de los dos cables desde A (los dos salen de A hacia el piso). Con AB y la tensión armo la fuerza. Con AC armo el unitario de la línea sobre la que voy a proyectar. El producto punto de esos dos me sirve para las partes (b) y (c) sin repetir cuentas.

PASO 1 Coordenadas y vectores de los dos cables

$$A(0; 0; 9) \text{ m} \quad B(2; 6; 0) \text{ m} \quad C(2; -6; 0) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{A \rightarrow B} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k} \text{ m} \quad \vec{r}_{A \rightarrow C} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 9\hat{k} \text{ m}$$

Los dos son idénticos salvo el signo de $\hat{j}$: los cables son simétricos respecto al plano xz . Eso hará que las dos longitudes salgan iguales.

PASO 2 Longitudes

$$|\vec{r}_{A \rightarrow B}| = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11 \text{ m} \quad |\vec{r}_{A \rightarrow C}| = \sqrt{4 + 36 + 81} = 11 \text{ m}$$

PASO 3 (a) La fuerza del cable AB

$$\vec{T}_{AB} = 1100 \text{ N} \cdot \frac{2\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k}}{11} = 100 (2\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{T}_{AB} = 200\hat{i} + 600\hat{j} - 900\hat{k} \quad [\text{N}]}$$

PASO 4 Unitario de la línea AC

$$\hat{\lambda}_{AC} = \frac{2\hat{i} - 6\hat{j} - 9\hat{k}}{11} = 0,1818\hat{i} - 0,5455\hat{j} - 0,8182\hat{k}$$

PASO 5 (b) Proyección de la fuerza sobre AC

$$(T_{AB})_{AC} = \vec{T}_{AB} \cdot \hat{\lambda}_{AC} = \frac{(200)(2) + (600)(-6) + (-900)(-9)}{11} = \frac{400 - 3600 + 8100}{11} = \frac{4900}{11}$$

$$(T_{AB})_{AC} = 445,45 \text{ N}$$

PASO 6 (c) Ángulo entre los dos cables

$$\cos \theta = \frac{\vec{r}_{A \rightarrow B} \cdot \vec{r}_{A \rightarrow C}}{(11)(11)} = \frac{4 - 36 + 81}{121} = \frac{49}{121} = 0,4050 \quad \Rightarrow \quad \theta = 66,11^\circ$$

Respuesta: $\vec{T}_{AB} = 200\hat{i} + 600\hat{j} - 900\hat{k}$ N; la proyección sobre AC vale 445,45 N y los cables abren un ángulo de $66,11^\circ$. La proyección salió **positiva**: la fuerza del cable AB tiene una componente que apunta *hacia* C , es decir, tiende a estirar el otro cable, no a aflojarlo.

Relación entre (b) y (c)

No son dos cuentas independientes. Como $|\vec{T}_{AB}| = 1100 \text{ N}$ y $\theta = 66,11^\circ$, la proyección también sale de $1100 \cos(66,11^\circ) = 445,4 \text{ N}$. Si en el parcial te sobra un minuto, esa es la verificación cruzada más rápida que existe.

El signo de la componente z

Los dos cables *bajan* desde A , así que las dos componentes $\hat{k}$ son negativas. Al multiplicarlas entre sí en el producto punto, $(-9)(-9) = +81$ queda positivo y domina la suma. Si escribes uno de los dos con $\hat{k}$ positivo, el producto te da $4 - 36 - 81 = -113$ y el ángulo te sale obtuso (159°), que es geoméricamente absurdo para dos cables que salen del mismo punto hacia el mismo lado del piso.

Chequeo de sentido común

$|\vec{T}_{AB}| = \sqrt{200^2 + 600^2 + 900^2} = \sqrt{40\,000 + 360\,000 + 810\,000} = \sqrt{1\,210\,000} = 1100 \text{ N}$. ✓
Y el ángulo: los cables están separados 12 m en el piso (y de -6 a $+6$) y cuelgan de 9 m de alto. Un triángulo así abre claramente más de 60° y menos de 90° . Los $66,11^\circ$ son razonables.

Problema 0.4 — Fuerzas dadas por sus ángulos directores**Ruta de solución**

Aquí no hay geometría que medir: los cosenos directores *son* el vector unitario. Para $\vec{F}_1$ me falta uno de los tres ángulos, y lo saco de la identidad $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$. Esa ecuación da dos raíces, y el enunciado me dice cuál escoger. Después es sumar componente a componente y volver a sacar ángulos.

PASO 1 Despeja el coseno que falta

$$\cos^2 \theta_z = 1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ = 1 - (0,5)^2 - (0,7071)^2 = 1 - 0,25 - 0,50 = 0,25$$

$$\cos \theta_z = \pm 0,5 \quad \Rightarrow \quad \theta_z = 60^\circ \text{ o } \theta_z = 120^\circ$$

El enunciado dice que θ_z es **obtuso**, así que $\theta_z = 120^\circ$ y $\cos \theta_z = -0,5$.

Por qué la raíz cuadrada da dos respuestas y no es un descuido

Dos fuerzas distintas pueden formar los mismos ángulos con x y con y : una apunta hacia arriba y la otra hacia abajo, como un reflejo en el plano xy . Por eso el problema *tiene* que decirte si θ_z es agudo u obtuso, o dibujarte la fuerza. Si un enunciado no lo dice, la respuesta correcta es dar las dos.

PASO 2 Componentes de $\vec{F}_1$

$$\vec{F}_1 = 900 (0,5\hat{i} + 0,7071\hat{j} - 0,5\hat{k})$$

$$\vec{F}_1 = 450\hat{i} + 636,40\hat{j} - 450\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 3 Componentes de $\vec{F}_2$

Los cosenos directores ya vienen dados, así que solo hay que multiplicar:

$$\vec{F}_2 = 600 \left(\frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k} \right) = 200\hat{i} - 400\hat{j} + 400\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 4 Suma vectorial, componente por componente

$$R_x = 450 + 200 = 650 \text{ N} \quad R_y = 636,40 - 400 = 236,40 \text{ N} \quad R_z = -450 + 400 = -50 \text{ N}$$

$$\vec{R} = 650\hat{i} + 236,40\hat{j} - 50\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 5 Magnitud de la resultante

$$|\vec{R}| = \sqrt{650^2 + 236,40^2 + 50^2} = \sqrt{422\,500 + 55\,885 + 2\,500} = \sqrt{480\,885} = 693,46 \text{ N}$$

PASO 6 Ángulos directores de la resultante

$$\cos \theta_x = \frac{650}{693,46} = 0,9373 \quad \cos \theta_y = \frac{236,40}{693,46} = 0,3409 \quad \cos \theta_z = \frac{-50}{693,46} = -0,0721$$

$$\theta_x = 20,39^\circ \quad \theta_y = 70,07^\circ \quad \theta_z = 94,13^\circ$$

Respuesta: θ_z de $\vec{F}_1$ vale 120° ; $\vec{F}_1 = 450\hat{i} + 636,40\hat{j} - 450\hat{k}$ N; $\vec{R} = 650\hat{i} + 236,40\hat{j} - 50\hat{k}$ N con $|\vec{R}| = 693,46$ N y $\theta_x = 20,39^\circ$, $\theta_y = 70,07^\circ$, $\theta_z = 94,13^\circ$. La resultante quedó casi horizontal ($\theta_z \approx 94^\circ$, es decir casi perpendicular al eje z) porque las componentes verticales de las dos fuerzas se cancelaron casi por completo: -450 contra $+400$.

Chequeo de sentido común

$|\vec{R}| = 693,46$ N tiene que ser menor que $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 1500$ N (desigualdad triangular) y mayor que $|900 - 600| = 300$ N. Se cumple. ✓

Y la identidad: $0,9373^2 + 0,3409^2 + 0,0721^2 = 0,8785 + 0,1162 + 0,0052 = 0,9999 \approx 1$. ✓

Problema 0.5 — Fuerza definida por dos ángulos

Ruta de solución

Este es el problema de “la sombra”. La fuerza no forma ángulos directos con los ejes, sino con el plano horizontal. Entonces hay que hacerlo en dos etapas: primero parto la fuerza en *vertical* y *sombra horizontal* usando el ángulo de 35° ; después parto la sombra en x y y usando el ángulo de 50° . Los ángulos directores salen al final, de las componentes ya calculadas.

PASO 1 Primera partición: vertical y sombra

El ángulo de 35° está entre la fuerza y su propia sombra en el plano xy . Entonces la componente vertical es el cateto opuesto y la sombra es el cateto adyacente:

$$F_z = F \sin 35^\circ = 240 (0,5736) = 137,66 \text{ N}$$

$$F_h = F \cos 35^\circ = 240 (0,8192) = 196,60 \text{ N}$$

F_h todavía no es una componente: es la magnitud de la sombra, que vive en el plano xy y hay que volver a partir.

PASO 2 Segunda partición: la sombra en x y en y

Dentro del plano horizontal, la sombra forma 50° con el eje x :

$$F_x = F_h \cos 50^\circ = 196,60 (0,6428) = 126,37 \text{ N}$$

$$F_y = F_h \sin 50^\circ = 196,60 (0,7660) = 150,60 \text{ N}$$

Cómo no equivocarte de seno o coseno

Dibuja el triángulo y pregúntate qué lado toca el ángulo. El lado que **toca** el ángulo (adyacente) lleva coseno; el que queda **enfrente** lleva seno. En el 35° , la sombra toca el ángulo $\Rightarrow$ coseno; la vertical queda enfrente $\Rightarrow$ seno.

PASO 3 El vector completo

$$\vec{F} = 126,37\hat{i} + 150,60\hat{j} + 137,66\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 4 Ángulos directores

$$\cos \theta_x = \frac{126,37}{240} = 0,5265 \quad \cos \theta_y = \frac{150,60}{240} = 0,6275 \quad \cos \theta_z = \frac{137,66}{240} = 0,5736$$

$$\theta_x = 58,23^\circ \quad \theta_y = 51,13^\circ \quad \theta_z = 55,00^\circ$$

Respuesta: $\vec{F} = 126,37\hat{i} + 150,60\hat{j} + 137,66\hat{k}$ N, con $\theta_x = 58,23^\circ$, $\theta_y = 51,13^\circ$ y $\theta_z = 55,00^\circ$. Los tres ángulos son agudos porque la fuerza apunta hacia el primer octante: sus tres componentes son positivas.

El 35° no es θ_z

Es el error clásico de este tipo de enunciado. El 35° se mide desde el **plano** xy ; θ_z se mide desde el **eje** z . Como el eje z es perpendicular a ese plano, son complementarios: $\theta_z = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. Efectivamente nos dio 55,00° en el paso 4. Si el enunciado dice “forma 35° con el plano”, nunca escribas $\theta_z = 35^\circ$.

Chequeo de sentido común

$\sqrt{126,37^2 + 150,60^2 + 137,66^2} = \sqrt{15\,969 + 22\,680 + 18\,950} = \sqrt{57\,599} = 240,0\text{ N. } \checkmark$
Y la identidad: $0,5265^2 + 0,6275^2 + 0,5736^2 = 0,2772 + 0,3938 + 0,3290 = 1,000. \checkmark$

Problema 0.6 — Nivel parcial: torre con dos tensores**Ruta de solución**

Es el Problema 0.1 hecho dos veces y luego sumado. Armo cada fuerza con la receta $\vec{F} = F \hat{\lambda}$, las sumo componente a componente para obtener la resultante, saco su magnitud y sus ángulos directores, y por último proyecto la resultante sobre la dirección $D \rightarrow O$, que es simplemente $-\hat{k}$.

PASO 1 Los dos vectores de posición, desde D

$$D(0; 0; 6)\text{ m} \quad A(3; 2; 0)\text{ m} \quad B(-2; 3; 0)\text{ m}$$

$$\vec{r}_{D \rightarrow A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}\text{ m} \quad \vec{r}_{D \rightarrow B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}\text{ m}$$

PASO 2 Longitudes de los dos cables

$$|\vec{r}_{D \rightarrow A}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7\text{ m} \quad |\vec{r}_{D \rightarrow B}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7\text{ m}$$

Los dos cables miden 7 m: no es casualidad del problema, es que A y B están a la misma distancia del pie de la torre.

PASO 3 (a) Las dos fuerzas

$$\vec{T}_{DA} = \frac{1,4}{7} (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 0,2 (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 0,6\hat{i} + 0,4\hat{j} - 1,2\hat{k} \quad [\text{kN}]$$

$$\vec{T}_{DB} = \frac{2,1}{7} (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 0,3 (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = -0,6\hat{i} + 0,9\hat{j} - 1,8\hat{k} \quad [\text{kN}]$$

PASO 4 (b) Resultante

$$R_x = 0,6 - 0,6 = 0 \quad R_y = 0,4 + 0,9 = 1,3\text{ kN} \quad R_z = -1,2 - 1,8 = -3,0\text{ kN}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1,3\hat{j} - 3,0\hat{k} \quad [\text{kN}]}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{0^2 + 1,3^2 + 3,0^2} = \sqrt{1,69 + 9,00} = \sqrt{10,69} = 3,2696\text{ kN}$$

PASO 5 Ángulos directores de la resultante

$$\cos \theta_x = \frac{0}{3,2696} = 0 \quad \cos \theta_y = \frac{1,3}{3,2696} = 0,3976 \quad \cos \theta_z = \frac{-3,0}{3,2696} = -0,9175$$

$$\theta_x = 90,00^\circ \quad \theta_y = 66,57^\circ \quad \theta_z = 156,57^\circ$$

PASO 6 (c) Proyección sobre el eje de la torre, sentido $D \rightarrow O$

La dirección $D \rightarrow O$ es la del vector $(0; 0; -6)$, o sea $\hat{\lambda}_{DO} = -\hat{k}$:

$$R_{DO} = \vec{\mathbf{R}} \cdot (-\hat{k}) = (1,3)(0) + (-3,0)(-1) = 3,0 \text{ kN}$$

Respuesta: $\vec{\mathbf{T}}_{DA} = 0,6\hat{i} + 0,4\hat{j} - 1,2\hat{k}$ kN; $\vec{\mathbf{T}}_{DB} = -0,6\hat{i} + 0,9\hat{j} - 1,8\hat{k}$ kN; $\vec{\mathbf{R}} = 1,3\hat{j} - 3,0\hat{k}$ kN con $|\vec{\mathbf{R}}| = 3,2696$ kN, $\theta_x = 90,00^\circ$, $\theta_y = 66,57^\circ$, $\theta_z = 156,57^\circ$; y la proyección sobre DO vale 3,0 kN. Esa proyección positiva de 3,0 kN es la fuerza con la que los dos cables juntos **comprimen** la torre contra el piso. Es el dato que usaría un diseñador para escoger el perfil del mástil.

El cero de R_x no es un error: es información

Cuando R_x da exactamente cero, la reacción normal es pensar que se perdió un término. Aquí no: $\vec{\mathbf{T}}_{DA}$ aporta $+0,6$ y $\vec{\mathbf{T}}_{DB}$ aporta $-0,6$. Las dos componentes horizontales en x se cancelan, y por eso $\theta_x = 90^\circ$: la resultante está contenida en el plano yz . Si te da cero, comprueba con la suma; si la suma confirma el cero, escríbelo y explica por qué.

Chequeo de sentido común

La suma de las componentes verticales de los dos cables es $-1,2 - 1,8 = -3,0$ kN, y esa es exactamente la proyección que calculamos sobre DO (con signo cambiado porque DO apunta hacia abajo). Los dos caminos coinciden. ✓

Además $|\vec{\mathbf{R}}| = 3,2696$ kN debe ser menor que $1,4 + 2,1 = 3,5$ kN: lo es, y por poco, lo cual tiene sentido porque los dos cables jalan casi en la misma dirección (hacia abajo).

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 0

0.1	$\vec{T} = 0,6\hat{i} + 2,4\hat{j} - 0,8\hat{k}$ kN; $\theta_x = 76,66^\circ$, $\theta_y = 22,62^\circ$, $\theta_z = 107,92^\circ$
0.2	$\theta = 42,72^\circ$; proyección de OA sobre $OB = 5,143$ m
0.3	$\vec{T}_{AB} = 200\hat{i} + 600\hat{j} - 900\hat{k}$ N; proyección sobre $AC = 445,45$ N; $\theta = 66,11^\circ$
0.4	$\theta_z = 120^\circ$; $\vec{F}_1 = 450\hat{i} + 636,40\hat{j} - 450\hat{k}$ N; $\vec{R} = 650\hat{i} + 236,40\hat{j} - 50\hat{k}$ N, $ \vec{R} = 693,46$ N; $\theta_x = 20,39^\circ$, $\theta_y = 70,07^\circ$, $\theta_z = 94,13^\circ$
0.5	$\vec{F} = 126,37\hat{i} + 150,60\hat{j} + 137,66\hat{k}$ N; $\theta_x = 58,23^\circ$, $\theta_y = 51,13^\circ$, $\theta_z = 55,00^\circ$
0.6	$\vec{T}_{DA} = 0,6\hat{i} + 0,4\hat{j} - 1,2\hat{k}$ kN; $\vec{T}_{DB} = -0,6\hat{i} + 0,9\hat{j} - 1,8\hat{k}$ kN; $\vec{R} = 1,3\hat{j} - 3,0\hat{k}$ kN, $ \vec{R} = 3,2696$ kN; $\theta_x = 90,00^\circ$, $\theta_y = 66,57^\circ$, $\theta_z = 156,57^\circ$; $R_{DO} = 3,0$ kN

Antes de pasar al Taller 1

Si resolviste los seis sin mirar la Parte B, ya tienes la mitad del punto 1 del parcial resuelta. Si te trabaste, el punto suele ser uno de estos tres:

1. El orden de la resta en $\vec{r}_{A \rightarrow B}$ (Problema 0.1).
2. Dividir entre una o entre dos magnitudes (Problema 0.2).
3. Confundir un ángulo con un plano con un ángulo director (Problema 0.5).

Vuelve solo a ese, no al taller entero.

TALLER 1

Momento de una fuerza: respecto a un punto y respecto a un eje

Semana del programa: Semana 1, clase 2 y Semana 2, clase 1 • Tiempo sugerido: 4 horas

1. Lo que necesitas de este tema

Qué es un momento, sin fórmulas todavía

Empuja una puerta justo al lado de la bisagra: no gira. Empújala en el borde de afuera con la misma fuerza: gira fácil. La fuerza es la misma; lo que cambia es **dónde** la aplicas. El momento es exactamente esa idea: mide la capacidad de una fuerza para hacer *girar* un cuerpo alrededor de un punto o de un eje.

Por eso el momento necesita dos cosas: la fuerza $\vec{F}$ y el vector de posición $\vec{r}$ que va **desde el punto respecto al cual tomas momentos hasta cualquier punto de la línea de acción de la fuerza**.

Momento respecto a un PUNTO: producto cruz

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}} \quad \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Desarrollado:

$$\vec{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y) \hat{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \hat{k}$$

El resultado es un **vector** perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Su dirección es el eje alrededor del cual la fuerza trata de girar el cuerpo, y el sentido lo da la regla de la mano derecha.

En 2D todo esto se reduce a la tercera componente:

$$M_O = r_x F_y - r_y F_x \quad (+ \text{ antihorario, } - \text{ horario})$$

Momento respecto a un EJE: producto mixto

El momento respecto a un eje es **la parte** del momento que realmente hace girar alrededor de ese eje: su proyección.

$$\boxed{M_\ell = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda}_\ell = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{\lambda}_\ell} \quad M_\ell = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde O es *cualquier* punto del eje y $\hat{\lambda}_\ell$ es el unitario del eje. El resultado es un **número con signo**, no un vector.

La propiedad que te ahorra la mitad de las cuentas

$\vec{r}$ puede ir del punto a *cualquier* punto de la línea de acción de la fuerza. Escoge el que tenga más ceros. En el Problema 1.6 vas a ver cómo un $\vec{r}$ bien escogido convierte un producto cruz de nueve términos en uno de dos.

Teorema de Varignon y distancia perpendicular

El momento de una fuerza es igual a la suma de los momentos de sus componentes. Por eso puedes partir una fuerza inclinada en F_x y F_y y sumar los dos momentos por separado: es el mismo resultado y suele ser más fácil.

Y en sentido inverso, si ya tienes el momento puedes hallar la distancia perpendicular entre el punto y la línea de acción:

$$d = \frac{|\vec{M}_O|}{|\vec{F}|}$$

Las tres confusiones que cuestan puntos

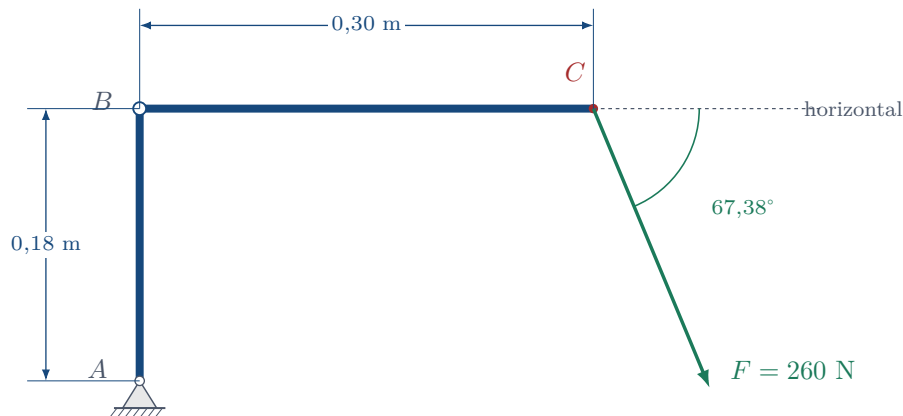
1. **Brazo $\neq$ distancia al punto de aplicación.** El brazo es la distancia *perpendicular* del punto a la *línea de acción*, no al punto donde dibujaste la flecha.
2. **Momento respecto a un punto es vector; respecto a un eje es escalar.** Si te piden M_{AB} y entregas tres componentes, la respuesta está mal escrita.
3. **Una fuerza que corta el eje o es paralela a él no produce momento respecto a ese eje.** Da cero, y eso no es un error: es física.

PARTE A — Enunciados

Problema 1.1 — Ménsula en el plano

Sobre la ménsula ABC actúa en C una fuerza de 260 N con la dirección que muestra la figura (pendiente 12 vertical por cada 5 horizontal). El apoyo de pasador está en A .

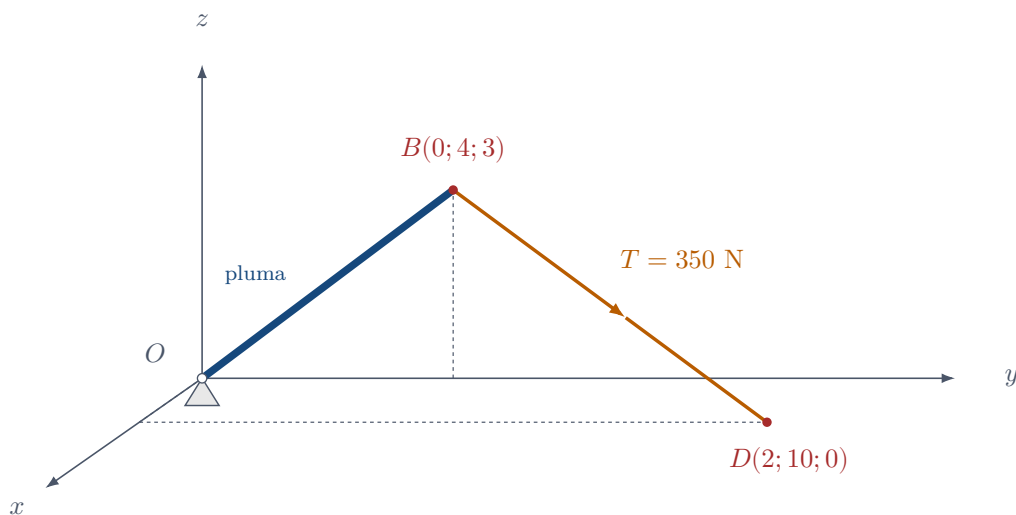
- Determina el momento de esa fuerza respecto a A .
- Determina la distancia perpendicular del punto A a la línea de acción de la fuerza.



Problema 1.2 — Pluma sostenida por un cable

La pluma recta OB está articulada en O y su extremo B está en $(0; 4; 3)\text{ m}$. Un cable va de B al anclaje $D(2; 10; 0)\text{ m}$ y su tensión es de 350 N .

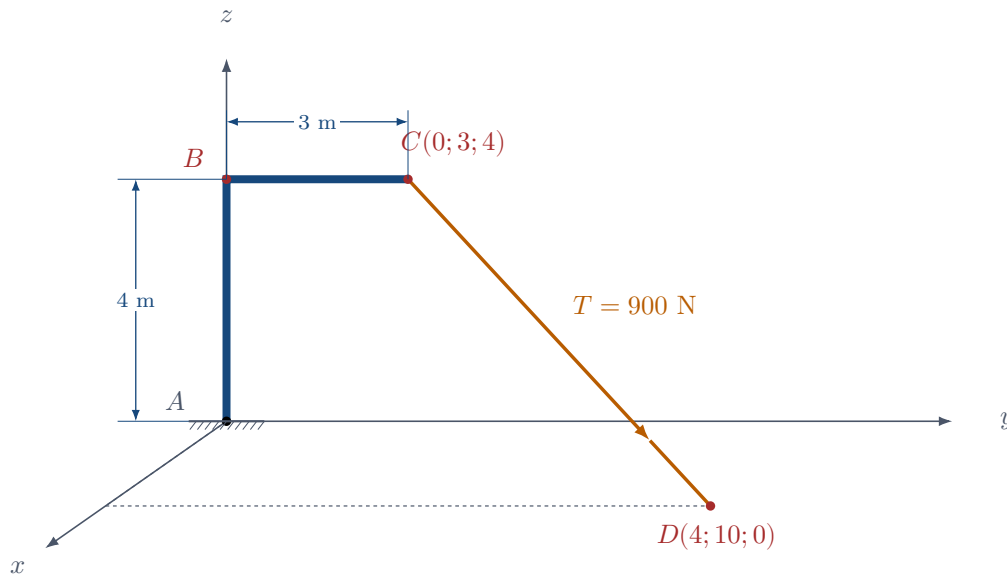
- Determina el momento que esa tensión produce respecto a O .
- Determina la distancia perpendicular de O a la línea de acción del cable.



Problema 1.3 — Tubo acodado: momento respecto a un eje vertical

El tubo ABC está empotrado en el piso en $A(0; 0; 0)$, sube verticalmente hasta $B(0; 0; 4)$ m y luego se acoda horizontalmente hasta $C(0; 3; 4)$ m. En C se ata un cable que va al anclaje $D(4; 10; 0)$ m con una tensión de 900 N.

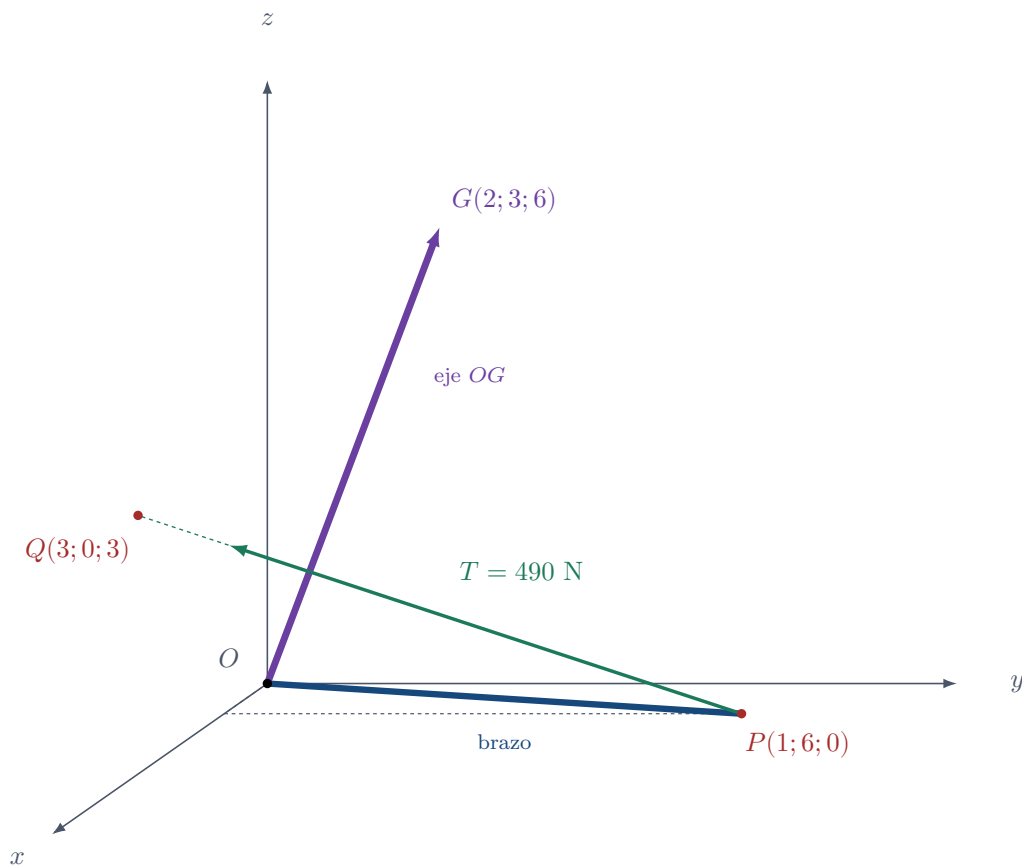
- (a) Determina el momento de la tensión respecto a A .
- (b) Determina el momento respecto al eje AB (el eje vertical del tubo) e interpreta el signo.



Problema 1.4 — Momento respecto a un eje oblicuo

La flecha rígida OG gira alrededor de su propio eje; G está en $(2; 3; 6)$ m. A la flecha está soldado un brazo OP que llega hasta $P(1; 6; 0)$ m. En P se amarra un cable que va hasta $Q(3; 0; 3)$ m con una tensión de 490 N.

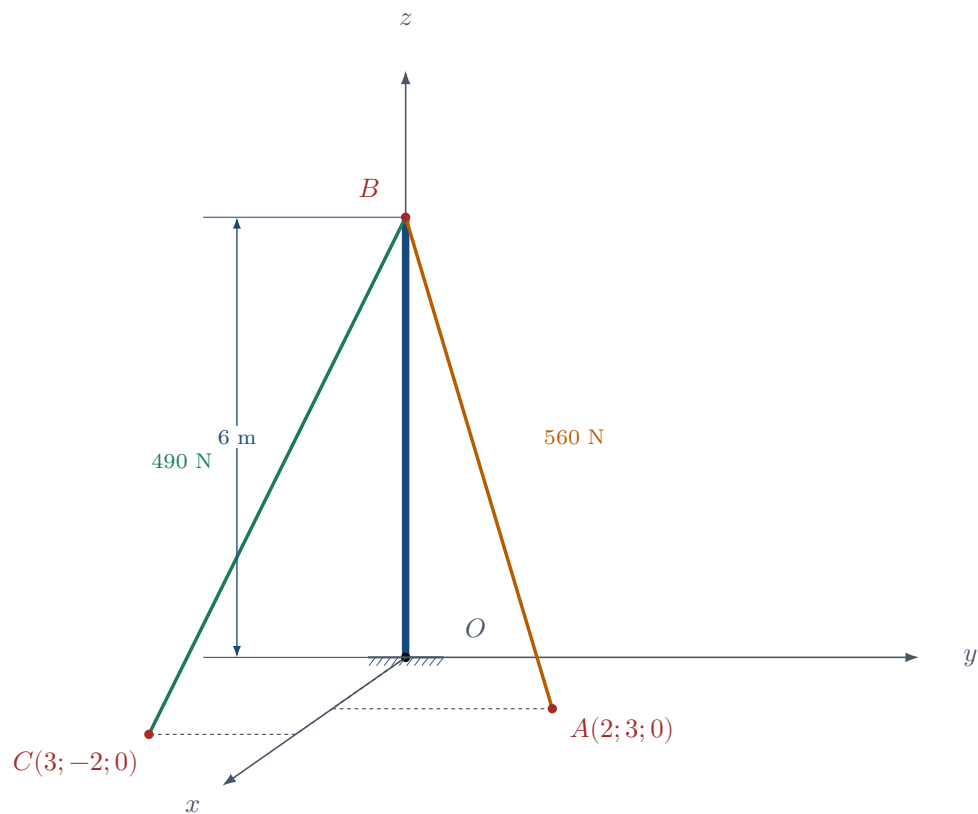
Determina el momento de esa tensión respecto al eje OG y di en qué sentido hace girar la flecha.



Problema 1.5 — Poste con dos cables

Del tope $B(0; 0; 6)$ m de un poste salen dos cables hacia los anclajes $A(2; 3; 0)$ m y $C(3; -2; 0)$ m, con tensiones de 560 N y 490 N respectivamente.

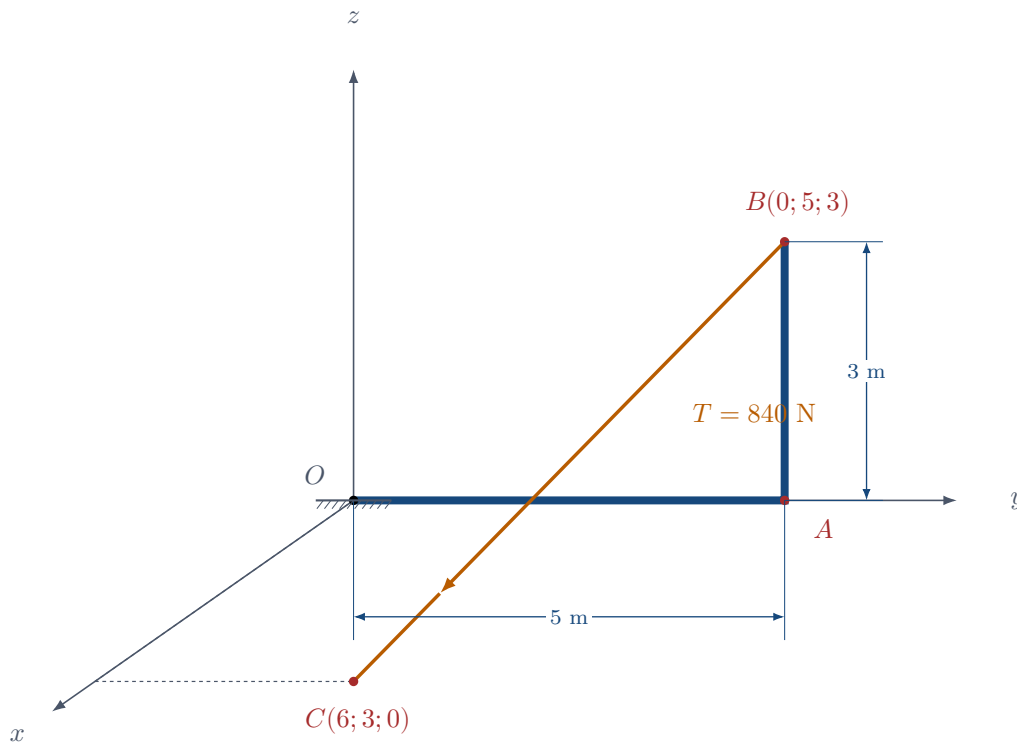
- (a) Determina la fuerza resultante que los dos cables ejercen sobre el poste en B .
- (b) Determina el momento de esa resultante respecto a la base O del poste.
- (c) Explica por qué la componente z del momento vale cero.



Problema 1.6 — Nivel parcial: tubo OAB con cable

El tubo OAB sale de O a lo largo del eje y hasta $A(0; 5; 0)$ m y luego sube hasta $B(0; 5; 3)$ m. En B se amarra un cable que llega al anclaje $C(6; 3; 0)$ m. La tensión del cable es de 840 N.

- Escribe como vector la fuerza que el cable ejerce en B y determina sus ángulos directores.
- Determina el momento que esa fuerza produce respecto a O .
- Determina el momento respecto al eje OA .



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 1.1 — Ménsula en el plano

Ruta de solución

Todo pasa en el plano xy , así que el momento va a ser un solo número. Primero parto la fuerza en sus componentes usando el triángulo 5–12–13. Después escribo el vector que va de A hasta C (el punto donde está aplicada). Con $M_A = r_x F_y - r_y F_x$ sale el momento, y la distancia perpendicular sale de dividir ese momento entre la magnitud de la fuerza.

PASO 1 Parte la fuerza en componentes

El triángulo de pendiente tiene catetos 5 y 12, así que su hipotenusa vale $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. La fuerza apunta hacia la derecha y hacia abajo:

$$F_x = 260 \left(\frac{5}{13} \right) = 100 \text{ N} \quad F_y = -260 \left(\frac{12}{13} \right) = -240 \text{ N}$$

$$\vec{F} = 100\hat{i} - 240\hat{j} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Escribe el vector de posición de A a C

$$\vec{r}_{A \rightarrow C} = 0,30\hat{i} + 0,18\hat{j} \quad [\text{m}]$$

La ménsula tiene dos tramos, pero el vector de posición no se dibuja siguiendo la barra: va *en línea recta* de A a C .

PASO 3 Aplica la fórmula del momento en 2D

$$M_A = r_x F_y - r_y F_x = (0,30)(-240) - (0,18)(100) = -72 - 18$$

$$M_A = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Lee el resultado con Varignon

Los dos sumandos son los momentos de las dos componentes por separado:

- $F_y = -240 \text{ N}$ actuando con brazo horizontal $0,30 \text{ m}$ aporta $-72 \text{ N} \cdot \text{m}$: empuja el extremo hacia abajo, y eso gira la ménsula en sentido horario.
- $F_x = 100 \text{ N}$ actuando con brazo vertical $0,18 \text{ m}$ aporta $-18 \text{ N} \cdot \text{m}$: empuja hacia la derecha por encima del pasador, y eso también gira en sentido horario.

Los dos empujan para el mismo lado, por eso se suman en vez de restarse.

PASO 5 Distancia perpendicular

$$d = \frac{|M_A|}{|\vec{F}|} = \frac{90 \text{ N} \cdot \text{m}}{260 \text{ N}} = 0,3462 \text{ m}$$

Respuesta: $M_A = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$, es decir $90 \text{ N} \cdot \text{m}$ en sentido **horario**. La línea de acción de la fuerza pasa a $d = 0,3462 \text{ m} = 34,62 \text{ cm}$ del pasador A .

El brazo no es 0,30 m ni 0,18 m, y tampoco $|\vec{r}_{AC}|$

Mucha gente calcula $|\vec{r}_{A \rightarrow C}| = \sqrt{0,30^2 + 0,18^2} = 0,350 \text{ m}$ y multiplica $260 \times 0,350 = 91,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Se parece al resultado correcto, pero está mal: ese es el momento que habría si la fuerza fuera *perpendicular* a AC , y no lo es. El brazo verdadero es la distancia perpendicular a la *línea de acción*, que da 0,3462 m. El parecido entre 91,0 y 90,0 es pura casualidad de este problema, y por eso es tan traicionero.

Chequeo de sentido común

$d = 0,3462 \text{ m}$ tiene que ser menor o igual que $|\vec{r}_{A \rightarrow C}| = 0,350 \text{ m}$, porque la distancia perpendicular es la *más corta* entre el punto y la recta. Se cumple, y por poco: eso dice que la fuerza es casi perpendicular a AC . ✓

Problema 1.2 — Pluma sostenida por un cable

Ruta de solución

Primero armo la fuerza del cable con la receta del Taller 0: vector $B \rightarrow D$, unitario, por la tensión. Después tomo momentos respecto a O con $\vec{r}_{O \rightarrow B}$, que es el vector más cómodo porque B es justamente donde está aplicada la fuerza. Por último, la distancia perpendicular sale de $d = |\vec{M}_O|/|\vec{F}|$.

PASO 1 La fuerza del cable

$$\begin{aligned}\vec{r}_{B \rightarrow D} &= (2 - 0)\hat{i} + (10 - 4)\hat{j} + (0 - 3)\hat{k} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} \text{ m} \\ |\vec{r}_{B \rightarrow D}| &= \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7 \text{ m} \quad \vec{T} = \frac{350}{7}(2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}) = 50(2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}) \\ \vec{T} &= 100\hat{i} + 300\hat{j} - 150\hat{k} \quad [\text{N}]\end{aligned}$$

PASO 2 El vector de posición

$$\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m}$$

PASO 3 Producto cruz, componente por componente

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 100 & 300 & -150 \end{vmatrix}$$

$$M_x = (4)(-150) - (3)(300) = -600 - 900 = -1500$$

$$M_y = (3)(100) - (0)(-150) = 300 - 0 = 300$$

$$M_z = (0)(300) - (4)(100) = 0 - 400 = -400$$

$$\vec{M}_O = -1500\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Cómo no equivocarse con el signo del término $\hat{j}$

La componente $\hat{j}$ del producto cruz lleva signo cambiado en la regla del determinante. En vez de memorizarlo, usa esta versión ya despejada y aplícala siempre igual:

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y \quad M_y = r_z F_x - r_x F_z \quad M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

Fíjate en el patrón: los subíndices van rotando $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Escríbela en la hoja apenas empiece el parcial.

PASO 4 Magnitud y distancia perpendicular

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{1500^2 + 300^2 + 400^2} = \sqrt{2\,250\,000 + 90\,000 + 160\,000} = \sqrt{2\,500\,000} = 1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$d = \frac{1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}}{350 \text{ N}} = 4,5175 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{M}_O = -1500\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, con magnitud $1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}$, y la línea de acción del cable pasa a $4,5175 \text{ m}$ de la articulación O . La componente $M_z = -400 \text{ N} \cdot \text{m}$ dice que, además de doblar la pluma, el cable tiende a barrerla alrededor del eje vertical en sentido horario visto desde arriba.

Chequeo de sentido común

El momento tiene que ser **perpendicular** tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Compruébalo con dos productos punto que deben dar cero:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{T} = (-1500)(100) + (300)(300) + (-400)(-150) = -150\,000 + 90\,000 + 60\,000 = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{r}_{O \rightarrow B} = (-1500)(0) + (300)(4) + (-400)(3) = 0 + 1200 - 1200 = 0 \quad \checkmark$$

Esta es la mejor verificación que existe para un producto cruz: si alguno de los dos no da cero, hay un error aritmético seguro.

Problema 1.3 — Tubo acodado: momento respecto a un eje vertical**Ruta de solución**

La parte (a) es un producto cruz normal con $\vec{r}_{A \rightarrow C}$. Para la parte (b) no hay que volver a empezar: como el eje AB es el eje z , el momento respecto a ese eje es simplemente la componente $\hat{k}$ del momento que ya calculé. Al final interpreto el signo mirando el tubo desde arriba.

PASO 1 La fuerza del cable

$$\vec{r}_{C \rightarrow D} = (4 - 0)\hat{i} + (10 - 3)\hat{j} + (0 - 4)\hat{k} = 4\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k} \text{ m}$$

$$|\vec{r}_{C \rightarrow D}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = \sqrt{81} = 9 \text{ m} \quad \vec{T} = \frac{900}{9}(4\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k}) = 400\hat{i} + 700\hat{j} - 400\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Vector de posición y momento respecto a A

$$\vec{r}_{A \rightarrow C} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (3)(-400) - (4)(700) = -1200 - 2800 = -4000$$

$$M_y = (4)(400) - (0)(-400) = 1600 - 0 = 1600$$

$$M_z = (0)(700) - (3)(400) = 0 - 1200 = -1200$$

$$\vec{M}_A = -4000\hat{i} + 1600\hat{j} - 1200\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad |\vec{M}_A| = \sqrt{20\,000\,000} = 4472,14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 3 (b) Momento respecto al eje AB

El eje AB va de A(0;0;0) a B(0;0;4), o sea que su unitario es $\hat{\lambda}_{AB} = \hat{k}$. Entonces:

$$M_{AB} = \vec{M}_A \cdot \hat{k} = (-4000)(0) + (1600)(0) + (-1200)(1)$$

$$M_{AB} = -1200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Interpreta el signo

El signo negativo con $\hat{\lambda}_{AB} = +\hat{k}$ significa: pon el pulgar derecho apuntando hacia $+z$ (hacia arriba); los dedos indican el sentido positivo. Como el resultado es negativo, el giro real va al contrario: **mirando el tubo desde arriba, el cable trata de barrerlo en sentido horario.**

Verificación con un segundo punto del eje

El momento respecto a un eje no depende de qué punto del eje escojas. Repite con B: $\vec{r}_{B \rightarrow C} = 3\hat{j}$, y

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 400 & 700 & -400 \end{vmatrix} = -1200\hat{i} + 0\hat{j} - 1200\hat{k}$$

La componente $\hat{k}$ vuelve a ser $-1200 \text{ N} \cdot \text{m}$. Los momentos respecto a A y a B son distintos (lógico, son puntos distintos), pero su proyección sobre el eje es la misma.

Qué parte de la fuerza sí produce giro alrededor del eje vertical

Mira la cuenta de $M_z = r_x F_y - r_y F_x$. Como $r_x = 0$, solo sobrevive $-r_y F_x = -(3)(400)$. Es decir: de los 900 N del cable, lo único que hace girar el tubo alrededor de su eje vertical es la componente $F_x = 400 \text{ N}$ actuando con el brazo horizontal de 3 m. La componente $F_z = -400 \text{ N}$ es *paralela* al eje y no produce ningún giro alrededor de él; la componente $F_y = 700 \text{ N}$ apunta directo hacia el eje y tampoco. Reconocer esto de entrada te ahorra el producto cruz completo.

Chequeo de sentido común

Comprueba que el momento es perpendicular a la fuerza: $(-4000)(400) + (1600)(700) + (-1200)(-400) = -1\,600\,000 + 1\,120\,000 + 480\,000 = 0$. ✓

Problema 1.4 — Momento respecto a un eje oblicuo

Ruta de solución

Ahora el eje no es un eje coordenado, así que hay que proyectar de verdad. Tres piezas: la fuerza del cable ($\vec{\mathbf{F}}$), un vector de posición desde un punto del eje hasta un punto de la línea de acción ($\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow P}$), y el unitario del eje ($\hat{\lambda}_{OG}$). El momento respecto al eje es el producto mixto de esos tres.

PASO 1 Unitario del eje

$$\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow G} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow G}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \text{ m}$$

$$\hat{\lambda}_{OG} = \frac{1}{7} (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 0,2857\hat{i} + 0,4286\hat{j} + 0,8571\hat{k}$$

PASO 2 La fuerza del cable

$$\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow Q} = (3 - 1)\hat{i} + (0 - 6)\hat{j} + (3 - 0)\hat{k} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow Q}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7 \text{ m}$$

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{490}{7} (2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}) = 140\hat{i} - 420\hat{j} + 210\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 3 Vector de posición desde el eje hasta la fuerza

Tomo O porque está sobre el eje, y P porque está sobre la línea de acción:

$$\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow P} = 1\hat{i} + 6\hat{j} + 0\hat{k} \text{ m}$$

PASO 4 Momento respecto al punto O

$$M_x = (6)(210) - (0)(-420) = 1260$$

$$M_y = (0)(140) - (1)(210) = -210$$

$$M_z = (1)(-420) - (6)(140) = -420 - 840 = -1260$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O = 1260\hat{i} - 210\hat{j} - 1260\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 5 Proyecta sobre el eje

$$M_{OG} = \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \hat{\lambda}_{OG} = \frac{(1260)(2) + (-210)(3) + (-1260)(6)}{7} = \frac{2520 - 630 - 7560}{7} = \frac{-5670}{7}$$

$$M_{OG} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $M_{OG} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$. La magnitud del giro alrededor de la flecha es $810 \text{ N} \cdot \text{m}$, y el signo negativo dice que gira en sentido **contrario** al que marca la regla de la mano derecha con el pulgar apuntando de O hacia G .

La misma cuenta como un solo determinante

Se puede hacer todo de una:

$$M_{OG} = \begin{vmatrix} 0,2857 & 0,4286 & 0,8571 \\ 1 & 6 & 0 \\ 140 & -420 & 210 \end{vmatrix} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Primera fila el unitario del eje, segunda el vector de posición, tercera la fuerza. Ese orden importa: cambiarlo te cambia el signo.

No proyectes la fuerza; proyecta el momento

El error más común es calcular $\vec{T} \cdot \hat{\lambda}_{OG}$ y llamarle momento. Eso da $(140)(2) + (-420)(3) + (210)(6)$ dividido en 7, o sea $0 \text{ N} \cdot \text{m}$, y ni siquiera tiene unidades de momento: son newtons. La fuerza se proyecta para hallar *fuerzas* a lo largo del eje; para el momento hay que hacer primero el producto cruz y proyectar *después*.

Chequeo de sentido común

$|M_{OG}| = 810 \text{ N} \cdot \text{m}$ tiene que ser menor o igual que $|\vec{M}_O|$, porque una proyección nunca supera al vector proyectado:

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{1260^2 + 210^2 + 1260^2} = \sqrt{1\,587\,600 + 44\,100 + 1\,587\,600} = 1794,24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y $810 \leq 1794,24$. ✓ La parte que “se perdió” es el momento que trata de doblar la flecha en vez de hacerla girar; eso lo aguantan los cojinetes.

Problema 1.5 — Poste con dos cables**Ruta de solución**

Armo las dos fuerzas por separado con la receta del Taller 0, las sumo para obtener la resultante, y tomo momentos respecto a O con $\vec{r}_{O \rightarrow B}$. Como las dos fuerzas están aplicadas en el mismo punto B , puedo sumarlas primero y hacer un solo producto cruz en vez de dos.

PASO 1 Las dos fuerzas

$$\begin{aligned} \vec{r}_{B \rightarrow A} &= 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k} \text{ m}, & |\vec{r}_{B \rightarrow A}| &= \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \text{ m} \\ \vec{F}_1 &= \frac{560}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 80(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 160\hat{i} + 240\hat{j} - 480\hat{k} \quad [\text{N}] \\ \vec{r}_{B \rightarrow C} &= 3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k} \text{ m}, & |\vec{r}_{B \rightarrow C}| &= \sqrt{9 + 4 + 36} = 7 \text{ m} \\ \vec{F}_2 &= \frac{490}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 70(3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 210\hat{i} - 140\hat{j} - 420\hat{k} \quad [\text{N}] \end{aligned}$$

PASO 2 (a) Resultante

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (160 + 210)\hat{i} + (240 - 140)\hat{j} + (-480 - 420)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 370\hat{i} + 100\hat{j} - 900\hat{k} \quad [\text{N}]} \quad |\vec{R}| = \sqrt{136\,900 + 10\,000 + 810\,000} = 978,2 \text{ N}$$

PASO 3 (b) Momento respecto a O

$$\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (0)(-900) - (6)(100) = -600$$

$$M_y = (6)(370) - (0)(-900) = 2220$$

$$M_z = (0)(100) - (0)(370) = 0$$

$$\vec{M}_O = -600\hat{i} + 2220\hat{j} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{360\,000 + 4\,928\,400} = 2299,65 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 (c) Por qué $M_z = 0$

Los dos cables están amarrados en B , y B está *sobre* el eje z . El brazo de cualquier fuerza aplicada en B respecto al eje z es cero: la línea de acción corta el eje. Y una fuerza cuya línea de acción corta un eje no puede hacer girar nada alrededor de ese eje, igual que empujar una puerta exactamente en la bisagra no la abre.

Respuesta: $\vec{R} = 370\hat{i} + 100\hat{j} - 900\hat{k}$ N (978,2 N de magnitud) y $\vec{M}_O = -600\hat{i} + 2220\hat{j}$ N·m (2299,65 N·m). El momento no tiene componente z porque ambas fuerzas se aplican en un punto del propio eje del poste: lo doblan, pero no lo torsionan.

Sumar primero y multiplicar después

Como las dos fuerzas se aplican en el *mismo* punto, vale $\vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$. Un producto cruz en lugar de dos. Ojo: esto solo funciona si el punto de aplicación es el mismo; si estuvieran en puntos distintos habría que hacer los dos momentos por separado.

La resultante $\vec{R}$ no vale $560 + 490$

$|\vec{R}| = 978,2$ N, no 1050 N. Las magnitudes de fuerzas no se suman como números salvo que las fuerzas sean paralelas y del mismo sentido. Aquí los cables se abren hacia lados distintos, y parte de sus componentes horizontales se cancela.

Chequeo de sentido común

Recalcula el momento sumando los dos momentos por separado:

$$\vec{r} \times \vec{F}_1 = (0, 0, 6) \times (160, 240, -480) = -1440\hat{i} + 960\hat{j}$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_2 = (0, 0, 6) \times (210, -140, -420) = 840\hat{i} + 1260\hat{j}$$

Suma: $(-1440 + 840)\hat{i} + (960 + 1260)\hat{j} = -600\hat{i} + 2220\hat{j}$. ✓ Coincide con el paso 3.

Problema 1.6 — Nivel parcial: tubo OAB con cable

Ruta de solución

Este es literalmente el punto 1 de un parcial real. Tres partes encadenadas: (a) la fuerza del cable y sus ángulos directores, que es Taller 0 puro; (b) el momento respecto a O con $\vec{r}_{O \rightarrow B}$; y (c) la proyección de ese momento sobre el eje OA , que va a lo largo de y , así que basta tomar la componente $\hat{j}$.

PASO 1 (a) La fuerza del cable

$$\vec{r}_{B \rightarrow C} = (6 - 0)\hat{i} + (3 - 5)\hat{j} + (0 - 3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k} \text{ m}$$

$$|\vec{r}_{B \rightarrow C}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7 \text{ m} \quad \vec{T} = \frac{840}{7}(6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 120(6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$\vec{T} = 720\hat{i} - 240\hat{j} - 360\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Ángulos directores

$$\cos \theta_x = \frac{720}{840} = 0,8571 \quad \cos \theta_y = \frac{-240}{840} = -0,2857 \quad \cos \theta_z = \frac{-360}{840} = -0,4286$$

$$\theta_x = 31,00^\circ \quad \theta_y = 106,60^\circ \quad \theta_z = 115,38^\circ$$

Dos ángulos obtusos: el cable jala hacia $-y$ y hacia abajo, lo cual concuerda con la figura.

PASO 3 (b) Momento respecto a O

$$\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (5)(-360) - (3)(-240) = -1800 + 720 = -1080$$

$$M_y = (3)(720) - (0)(-360) = 2160 - 0 = 2160$$

$$M_z = (0)(-240) - (5)(720) = 0 - 3600 = -3600$$

$$\vec{M}_O = -1080\hat{i} + 2160\hat{j} - 3600\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{1\,166\,400 + 4\,665\,600 + 12\,960\,000} = \sqrt{18\,792\,000} = 4334,97 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 (c) Momento respecto al eje OA

El eje OA va de $O(0; 0; 0)$ a $A(0; 5; 0)$, así que $\hat{\lambda}_{OA} = \hat{j}$:

$$M_{OA} = \vec{M}_O \cdot \hat{j} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El atajo que vale oro en el parcial

Para la parte (c) no hacía falta el producto cruz completo. Como A también está sobre el eje, se puede usar $\vec{r}_{A \rightarrow B} = 3\hat{k}$, que tiene dos ceros:

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 720 & -240 & -360 \end{vmatrix} = 720\hat{i} + 2160\hat{j} + 0\hat{k}$$

y su componente $\hat{j}$ es $2160 \text{ N} \cdot \text{m}$, el mismo resultado. Dos multiplicaciones en vez de nueve. Esta es la aplicación concreta del truco de la página 1: *escoge el vector de posición con más ceros*.

Respuesta: $\vec{T} = 720\hat{i} - 240\hat{j} - 360\hat{k} \text{ N}$, con $\theta_x = 31,00^\circ$, $\theta_y = 106,60^\circ$ y $\theta_z = 115,38^\circ$; $\vec{M}_O = -1080\hat{i} + 2160\hat{j} - 3600\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, de magnitud $4334,97 \text{ N} \cdot \text{m}$; y $M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$, positivo, o sea que el cable hace girar el tubo alrededor del tramo OA en el sentido que da la mano derecha con el pulgar hacia $+y$.

M_{OA} no es $|\vec{M}_O|$, ni se parece

$|\vec{M}_O| = 4334,97 \text{ N} \cdot \text{m}$ pero $M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$: menos de la mitad. El resto del momento ($-1080\hat{i}$ y $-3600\hat{k}$) no hace girar el tubo alrededor de OA ; lo *dobla* en el empotramiento. Son efectos físicos distintos y el parcial los pregunta por separado. Si entregas la magnitud total cuando te piden el momento respecto a un eje, el punto se pierde completo.

Chequeo de sentido común

Tres verificaciones rápidas:

1. $|\vec{T}| = \sqrt{720^2 + 240^2 + 360^2} = \sqrt{518\,400 + 57\,600 + 129\,600} = \sqrt{705\,600} = 840 \text{ N}$. ✓
2. $\vec{M}_O \cdot \vec{T} = (-1080)(720) + (2160)(-240) + (-3600)(-360) = -777\,600 - 518\,400 + 1\,296\,000 = 0$. ✓
3. Los dos caminos para M_{OA} (usando O y usando A) dieron $2160 \text{ N} \cdot \text{m}$. ✓

Y la distancia perpendicular de O a la línea del cable: $d = 4334,97/840 = 5,161 \text{ m}$, un valor razonable para un tubo que mide 5 m de largo y 3 m de alto.

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 1

1.1	$M_A = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$ (horario); $d = 0,3462 \text{ m}$
1.2	$\vec{T} = 100\hat{i} + 300\hat{j} - 150\hat{k} \text{ N}$; $\vec{M}_O = -1500\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$; $ \vec{M}_O = 1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}$; $d = 4,5175 \text{ m}$
1.3	$\vec{T} = 400\hat{i} + 700\hat{j} - 400\hat{k} \text{ N}$; $\vec{M}_A = -4000\hat{i} + 1600\hat{j} - 1200\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_{AB} = -1200 \text{ N} \cdot \text{m}$ (horario visto desde arriba)
1.4	$\vec{T} = 140\hat{i} - 420\hat{j} + 210\hat{k} \text{ N}$; $\vec{M}_O = 1260\hat{i} - 210\hat{j} - 1260\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_{OG} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$
1.5	$\vec{R} = 370\hat{i} + 100\hat{j} - 900\hat{k} \text{ N}$ (978,2 N); $\vec{M}_O = -600\hat{i} + 2220\hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}$ (2299,65 N · m); $M_z = 0$ porque las dos fuerzas se aplican sobre el propio eje z
1.6	$\vec{T} = 720\hat{i} - 240\hat{j} - 360\hat{k} \text{ N}$; $\theta_x = 31,00^\circ$, $\theta_y = 106,60^\circ$, $\theta_z = 115,38^\circ$; $\vec{M}_O = -1080\hat{i} + 2160\hat{j} - 3600\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ (4334,97 N · m); $M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$

Lo que tiene que quedarte de este taller

1. $\vec{r}$ va **desde** el punto de momentos **hasta** cualquier punto de la línea de acción. Escoge el que tenga más ceros.
2. Momento respecto a un punto: vector. Respecto a un eje: número con signo.
3. Un momento siempre es perpendicular a su fuerza: úsalo como chequeo, cuesta diez segundos.
4. Fuerza paralela al eje, o que lo corta, no aporta momento respecto a ese eje.

TALLER 2

Par de fuerzas, traslado de una fuerza y sistema fuerza-par

Semana del programa: Semana 2, clase 2 y Semana 3, clase 1 • Tiempo sugerido: 4 horas

1. Lo que necesitas de este tema

El par: la fuerza que no empuja, solo gira

Un **par** (o cupla) son dos fuerzas de igual magnitud, direcciones paralelas y sentidos opuestos. Al sumarlas vectorialmente da cero: un par **no empuja el cuerpo en ninguna dirección**. Lo único que hace es girarlo.

Es lo que pasa cuando giras el volante con las dos manos: una sube, la otra baja, el carro no se mueve de lado, pero el volante gira.

$$\vec{M} = \vec{r}_{B \rightarrow A} \times \vec{F}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza aplicada en A , $-\vec{F}$ la aplicada en B , y $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ el vector que va de una a la otra.

La propiedad que hace especial al par

El momento de un par **no depende del punto** respecto al cual lo calcules. Da lo mismo tomarlo en A , en B , en el origen o en la esquina del salón: siempre el mismo vector. Por eso un par es un *vector libre*: puedes dibujarlo en cualquier parte del cuerpo sin cambiar nada. En magnitud, si d es la distancia perpendicular entre las dos líneas de acción:

$$M = F d$$

Trasladar una fuerza: el sistema fuerza-par

Una fuerza **no** se puede mover de su línea de acción sin más. Pero sí se puede trasladar a cualquier punto si se le agrega un par que compense el cambio:

$$\vec{F} \text{ en } A \equiv \vec{F} \text{ en } B + \vec{M}_B = \vec{r}_{B \rightarrow A} \times \vec{F}$$

Este es el motor de todo el resto del curso: es lo que permite reemplazar un montón de fuerzas regadas por una sola fuerza y un solo par aplicados donde a ti te convenga.

Y al revés: de fuerza-par a una sola fuerza

Si en un punto O tienes $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{M}}_O$ y además $\vec{\mathbf{R}} \perp \vec{\mathbf{M}}_O$ (en 2D siempre ocurre), el sistema se reduce a **una sola fuerza** $\vec{\mathbf{R}}$ aplicada sobre otra línea de acción. Esa línea se encuentra pidiendo que la fuerza sola reproduzca el momento:

$$x R_y - y R_x = M_O$$

Cada punto (x, y) que cumpla esa ecuación está sobre la nueva línea de acción.

La regla de los tres pasos para trasladar

1. La fuerza **no cambia**: misma magnitud, misma dirección, mismo sentido.
2. El par que aparece es $\vec{\mathbf{r}}_{\text{nuevo} \rightarrow \text{viejo}} \times \vec{\mathbf{F}}$.
3. Si trasladas a un punto que ya está sobre la línea de acción, el par sale cero (porque $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ quedan paralelos).

Par y momento no son sinónimos

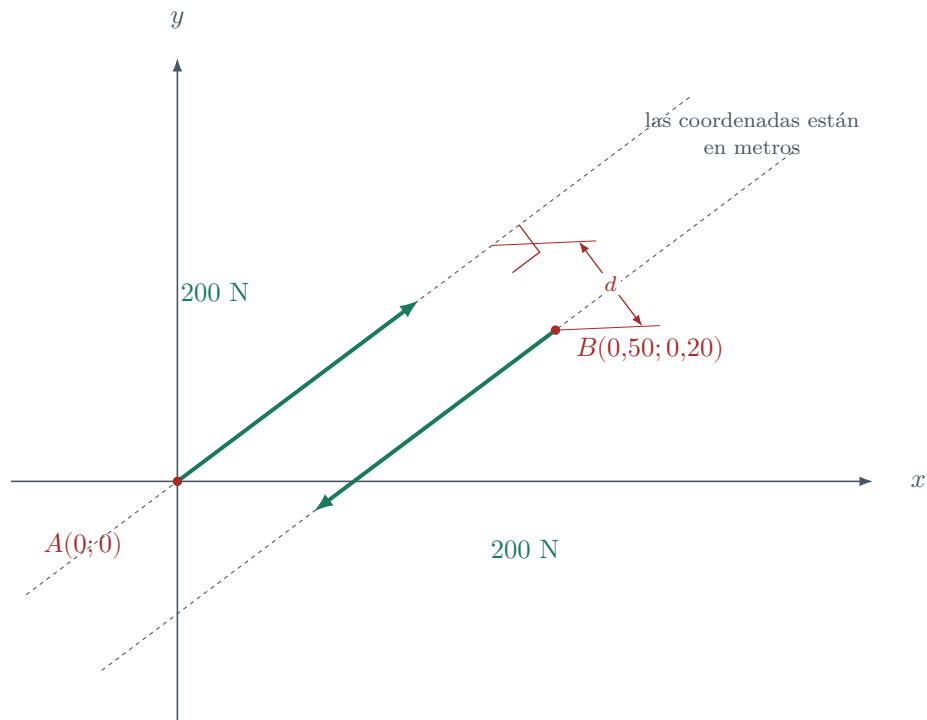
Todo par produce un momento, pero no todo momento viene de un par. El momento de *una* fuerza depende del punto que escojas; el momento de un *par* no. Cuando el enunciado dice “un par de $24 \text{ N} \cdot \text{m}$ ” te está dando un vector libre; cuando dice “el momento de la fuerza respecto a A ” te está pidiendo una cuenta que cambia si cambias el punto.

PARTE A — Enunciados

Problema 2.1 — Un par en el plano

Dos fuerzas de 200 N forman un par: una actúa en $A(0; 0)$ con dirección $(\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ y la otra en $B(0,50; 0,20)$ m con la dirección opuesta.

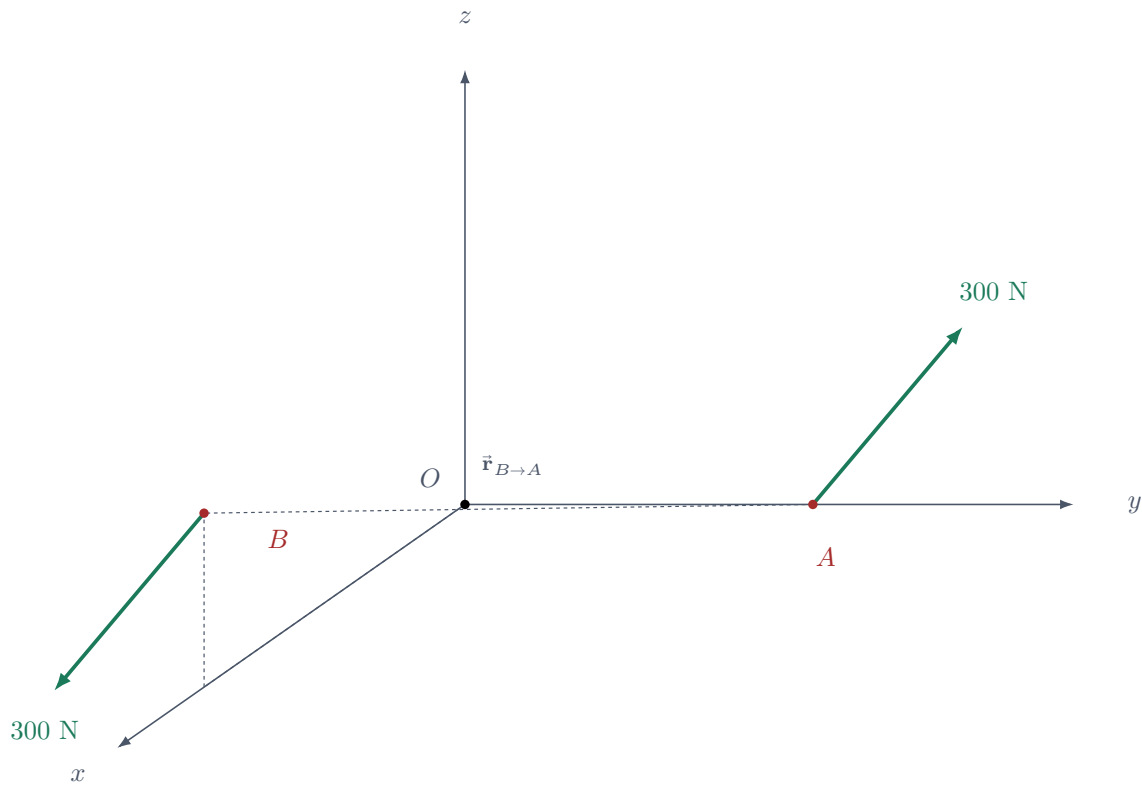
- Calcula el momento del par tomando momentos respecto a A , y luego repite tomándolos respecto al punto $P(1; 1)$ m. Compara.
- Determina la distancia perpendicular entre las dos líneas de acción.



Problema 2.2 — Un par en el espacio

Dos fuerzas de 300 N forman un par: una actúa en $A(0; 0,40; 0)$ m con la dirección del unitario $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ y la otra en $B(0,60; 0; 0,20)$ m con la dirección opuesta.

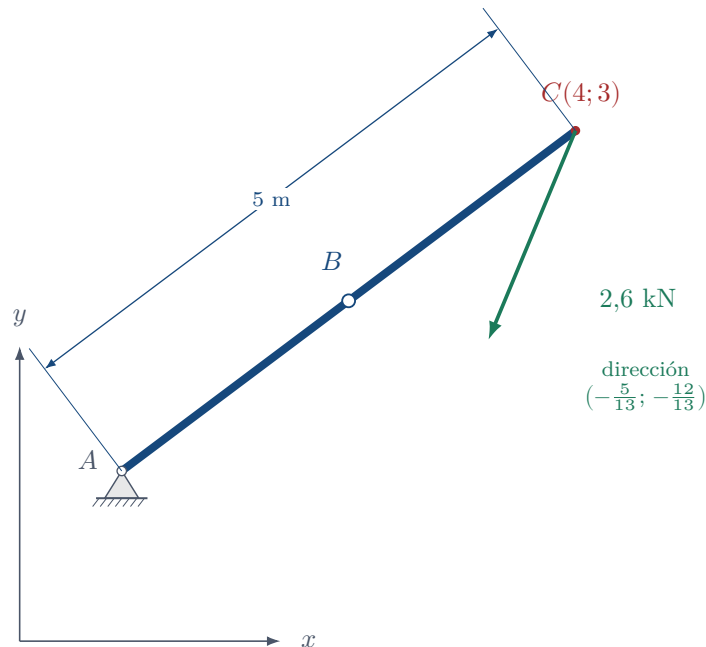
- (a) Determina el momento del par como vector.
- (b) Determina la distancia perpendicular entre las dos líneas de acción.



Problema 2.3 — Trasladar la fuerza de un cable

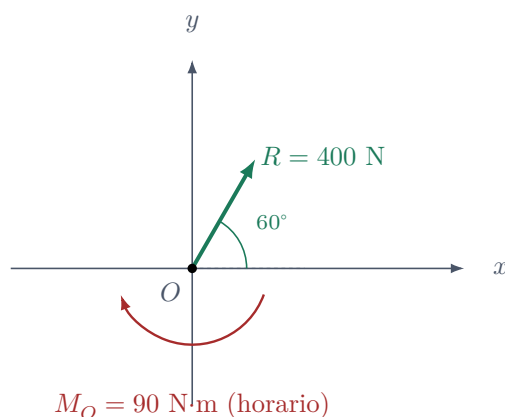
La pluma AC está articulada en $A(0; 0)$ y su extremo está en $C(4; 3)$ m. Un cable jala en C con una fuerza de 2,6 kN en la dirección $(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13})$.

Reemplaza esa fuerza por un sistema fuerza-par equivalente aplicado (a) en A y (b) en el punto medio $B(2; 1,5)$ m. Compara los dos pares.

**Problema 2.4 — De sistema fuerza-par a una sola fuerza**

En el origen O actúa un sistema fuerza-par formado por una fuerza $\vec{R}$ de 400 N inclinada 60° sobre la horizontal y un par de $90 \text{ N} \cdot \text{m}$ en sentido horario.

Reemplaza el sistema por **una sola fuerza** equivalente: determina los puntos donde su línea de acción corta el eje x y el eje y .

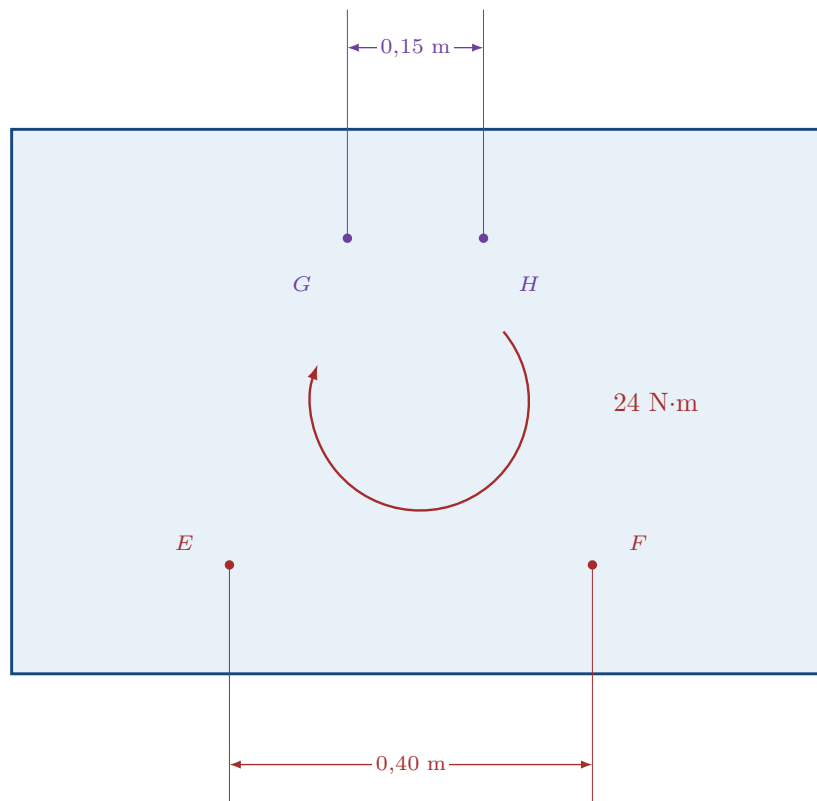


Problema 2.5 — Reemplazar un par por otro equivalente

Sobre la placa actúa un par de $24 \text{ N} \cdot \text{m}$ en sentido horario. Se quiere reemplazar por dos fuerzas verticales iguales y opuestas aplicadas:

- (a) en E y F , separados $0,40 \text{ m}$;
- (b) en G y H , separados $0,15 \text{ m}$.

Determina la magnitud de las fuerzas en cada caso y explica por qué el resultado tiene sentido físico.

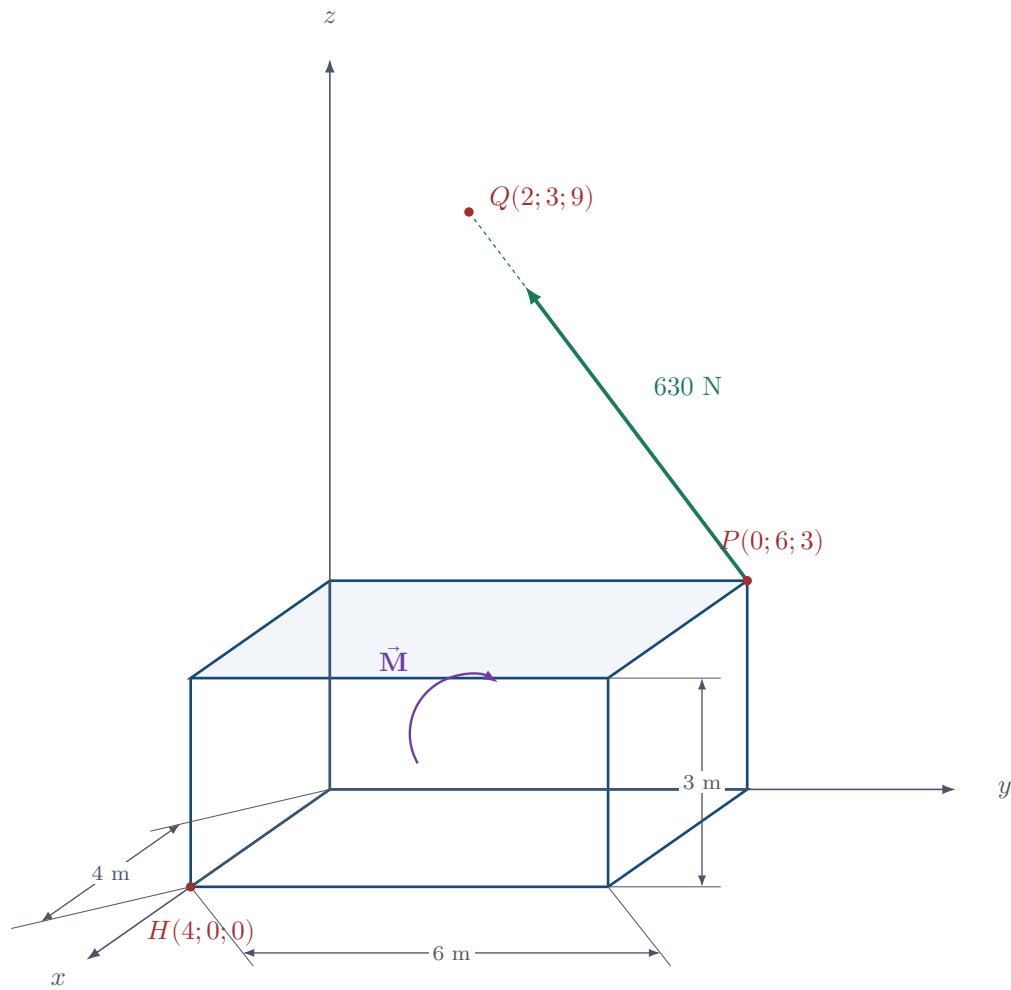


Problema 2.6 — Nivel parcial: bloque con fuerza y par

Sobre el bloque de la figura ($4\text{ m} \times 6\text{ m} \times 3\text{ m}$) actúan dos cosas:

- una fuerza de 630 N aplicada en la esquina $P(0; 6; 3)\text{ m}$, dirigida hacia el punto $Q(2; 3; 9)\text{ m}$;
- un par de momento $\vec{M} = 150\hat{j} - 200\hat{k}\text{ N}\cdot\text{m}$.

Reemplaza el sistema por un sistema fuerza-par equivalente aplicado en la esquina $H(4; 0; 0)\text{ m}$.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 2.1 — Un par en el plano

Ruta de solución

Voy a hacer a propósito la cuenta dos veces, desde dos puntos distintos, para ver con mis propios números que el resultado no cambia. En cada caso sumo los momentos de las dos fuerzas. Al final saco la distancia entre las líneas con $d = M/F$.

PASO 1 Escribe las dos fuerzas en componentes

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} &= 200 \left(\frac{4}{5} \hat{i} + \frac{3}{5} \hat{j} \right) = 160 \hat{i} + 120 \hat{j} \quad [\text{N}] \quad (\text{en } A) \\ -\vec{\mathbf{F}} &= -160 \hat{i} - 120 \hat{j} \quad [\text{N}] \quad (\text{en } B)\end{aligned}$$

Suma de fuerzas: $\vec{\mathbf{F}} + (-\vec{\mathbf{F}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Confirmado: un par no empuja.

PASO 2 Momentos tomados respecto a A

La fuerza aplicada en A tiene brazo cero respecto a A, así que solo aporta la de B:

$$M_A = \underbrace{0}_{\text{fuerza en A}} + [(0,50)(-120) - (0,20)(-160)] = -60 + 32 = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 3 Momentos tomados respecto a P(1; 1)

Ahora ninguna de las dos tiene brazo cero. Los vectores de posición son $\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow A} = (-1; -1)$ y $\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow B} = (-0,50; -0,80)$:

$$\begin{aligned}M_P &= [(-1)(120) - (-1)(160)] + [(-0,50)(-120) - (-0,80)(-160)] \\ &= (-120 + 160) + (60 - 128) = 40 - 68 = -28 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Respuesta: $M_A = M_P = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$. **Exactamente el mismo número**, aunque los sumandos intermedios fueran completamente distintos (0 y -28 en un caso; +40 y -68 en el otro). Esa es la propiedad que define al par.

PASO 4 Distancia perpendicular entre las líneas de acción

$$d = \frac{|M|}{F} = \frac{28 \text{ N} \cdot \text{m}}{200 \text{ N}} = 0,14 \text{ m}$$

La cuenta corta que deberías usar en el parcial

No hace falta sumar dos momentos. Como las dos fuerzas son iguales y opuestas, basta con

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}}_{B \rightarrow A} \times \vec{\mathbf{F}}$$

con $\vec{\mathbf{r}}_{B \rightarrow A} = (-0,50; -0,20)$ y $\vec{\mathbf{F}} = (160; 120)$:

$$M = (-0,50)(120) - (-0,20)(160) = -60 + 32 = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Una línea en vez de cuatro.

El vector $\vec{r}$ va de la fuerza negativa a la positiva

Si escribes $\vec{r}_{A \rightarrow B}$ en vez de $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ te sale $+28 \text{ N} \cdot \text{m}$: la magnitud correcta pero el giro al revés. La regla segura: $\vec{r}$ sale del punto donde actúa $-\vec{F}$ y llega al punto donde actúa $+\vec{F}$. Y si dudas, haz la cuenta larga de los dos momentos por separado: ahí no hay ambigüedad posible.

Chequeo de sentido común

La distancia $d = 0,14 \text{ m}$ tiene que ser menor que la separación entre los puntos A y B , que vale $\sqrt{0,50^2 + 0,20^2} = 0,539 \text{ m}$. Se cumple. ✓ Y el signo negativo dice giro horario: mira la figura, la flecha de arriba empuja hacia la derecha-arriba y la de abajo hacia la izquierda-abajo; eso efectivamente gira el conjunto en sentido horario.

Problema 2.2 — Un par en el espacio**Ruta de solución**

Mismo concepto que el 2.1, pero ahora el momento es un vector de tres componentes. Armo $\vec{F}$ multiplicando la magnitud por el unitario que me dan, armo $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ restando coordenadas, hago el producto cruz una sola vez, y de la magnitud saco la distancia.

PASO 1 La fuerza

$$\vec{F} = 300 \left(\frac{2}{3} \hat{i} - \frac{1}{3} \hat{j} + \frac{2}{3} \hat{k} \right) = 200 \hat{i} - 100 \hat{j} + 200 \hat{k} \quad [\text{N}]$$

Chequeo inmediato: $\sqrt{200^2 + 100^2 + 200^2} = \sqrt{90\,000} = 300 \text{ N}$. ✓

PASO 2 El vector que une los dos puntos de aplicación

$$\vec{r}_{B \rightarrow A} = (0 - 0,60) \hat{i} + (0,40 - 0) \hat{j} + (0 - 0,20) \hat{k} = -0,60 \hat{i} + 0,40 \hat{j} - 0,20 \hat{k} \text{ m}$$

PASO 3 Producto cruz

$$M_x = (0,40)(200) - (-0,20)(-100) = 80 - 20 = 60$$

$$M_y = (-0,20)(200) - (-0,60)(200) = -40 + 120 = 80$$

$$M_z = (-0,60)(-100) - (0,40)(200) = 60 - 80 = -20$$

$$\vec{M} = 60 \hat{i} + 80 \hat{j} - 20 \hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 Magnitud y distancia entre las líneas

$$|\vec{M}| = \sqrt{60^2 + 80^2 + 20^2} = \sqrt{3600 + 6400 + 400} = \sqrt{10\,400} = 101,98 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$d = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{F}|} = \frac{101,98}{300} = 0,340 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{M} = 60 \hat{i} + 80 \hat{j} - 20 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, de magnitud $101,98 \text{ N} \cdot \text{m}$, y las dos líneas de acción están separadas $0,340 \text{ m}$. Ese vector momento es el eje alrededor del cual el par trata de girar el cuerpo: apunta sobre todo hacia $+y$, así que el giro es principalmente alrededor del eje y .

El par es un vector libre, pero el cálculo no es libre de puntos

Aunque el resultado no dependa del punto de momentos, sí depende de **cuáles** son los dos puntos de aplicación. $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ tiene que unir las dos líneas de acción. Si por error usas el vector de posición de A desde el origen ($\vec{r}_{O \rightarrow A}$), estás calculando otra cosa completamente distinta.

Chequeo de sentido común

$\vec{M} \cdot \vec{F} = (60)(200) + (80)(-100) + (-20)(200) = 12\,000 - 8\,000 - 4\,000 = 0$. ✓ El momento de un par también es perpendicular a sus fuerzas.

Problema 2.3 — Trasladar la fuerza de un cable**Ruta de solución**

Trasladar una fuerza tiene una sola regla: la fuerza se copia idéntica al punto nuevo, y aparece un par igual al momento que la fuerza producía respecto a ese punto. Así que hago la misma cuenta dos veces, cambiando solo el vector de posición: una vez desde A y otra desde B .

PASO 1 La fuerza en componentes

$$\vec{F} = 2,6 \left(-\frac{5}{13} \hat{i} - \frac{12}{13} \hat{j} \right) = -1,0 \hat{i} - 2,4 \hat{j} \quad [\text{kN}]$$

PASO 2 (a) Sistema equivalente en A

La fuerza que va en A es la misma: $\vec{R} = -1,0 \hat{i} - 2,4 \hat{j}$ kN. El par que hay que agregar es el momento de la fuerza original respecto a A , con $\vec{r}_{A \rightarrow C} = (4; 3)$ m:

$$M_A = (4)(-2,4) - (3)(-1,0) = -9,6 + 3,0 = -6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PASO 3 (b) Sistema equivalente en B

Ahora $\vec{r}_{B \rightarrow C} = (2; 1,5)$ m:

$$M_B = (2)(-2,4) - (1,5)(-1,0) = -4,8 + 1,5 = -3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Compara

La **fuerza es la misma** en los dos sistemas; lo único que cambia es el par: $-6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en A y $-3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en B , exactamente la mitad. Tiene sentido: B es el punto medio de AC , así que está a la mitad de la distancia perpendicular de la línea de acción, y el par vale $F \cdot d$.

Respuesta: En A : $\vec{R} = -1,0 \hat{i} - 2,4 \hat{j}$ kN más un par de $6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ horario. En B : la misma $\vec{R}$ más un par de $3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ horario. Los dos sistemas, y la fuerza original sola aplicada en C , producen exactamente el mismo efecto sobre la pluma.

Dónde el par se vuelve cero

Si trasladas la fuerza a cualquier punto que ya esté sobre su línea de acción, el par sale cero: $\vec{r}$ y $\vec{F}$ quedan paralelos y su producto cruz se anula. Por eso una fuerza *sí* se puede deslizar libremente a lo largo de su propia línea de acción (principio de transmisibilidad), pero no se puede sacar de ella sin pagar el peaje del par.

La fuerza no se “reparte” al trasladarla

Un error frecuente es pensar que al mover la fuerza de C a A hay que reducirla. No: $\vec{\mathbf{R}}$ conserva magnitud, dirección y sentido. Lo que aparece *además* es el par. Si escribes una fuerza distinta en A , el sistema ya no es equivalente.

Chequeo de sentido común

Verifica que los dos sistemas dan el mismo momento respecto a un tercer punto, por ejemplo el origen (que coincide con A): desde B , el momento total vale $M_B + \vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B} \times \vec{\mathbf{R}} = -3,3 + [(2)(-2,4) - (1,5)(-1,0)] = -3,3 - 3,3 = -6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, igual que M_A . ✓

Problema 2.4 — De sistema fuerza-par a una sola fuerza**Ruta de solución**

Es el problema 2.3 leído al revés. Si una fuerza aplicada fuera del origen equivale a la misma fuerza en el origen más un par, entonces una fuerza en el origen más un par equivale a esa misma fuerza aplicada sobre *otra* línea. Escribo la condición de que la fuerza sola reproduzca el par y despejo dónde corta cada eje.

PASO 1 Componentes de la resultante

$$R_x = 400 \cos 60^\circ = 200 \text{ N} \quad R_y = 400 \sin 60^\circ = 346,41 \text{ N}$$

PASO 2 Plantea la condición de equivalencia

Si la fuerza sola actúa en un punto $(x; y)$, su momento respecto a O tiene que valer lo mismo que el par que estamos eliminando:

$$x R_y - y R_x = M_O \quad \Rightarrow \quad 346,41 x - 200 y = -90$$

Esa es la ecuación de la nueva línea de acción.

PASO 3 Corte con el eje x (hacemos $y = 0$)

$$346,41 x = -90 \quad \Rightarrow \quad x = -0,2598 \text{ m}$$

PASO 4 Corte con el eje y (hacemos $x = 0$)

$$-200 y = -90 \quad \Rightarrow \quad y = 0,45 \text{ m}$$

Respuesta: La fuerza única equivalente es la misma $\vec{\mathbf{R}} = 200\hat{i} + 346,41\hat{j} \text{ N}$ (400 N a 60°), pero aplicada sobre una línea que corta el eje x en $x = -0,2598 \text{ m}$ y el eje y en $y = 0,45 \text{ m}$. El signo negativo en x dice que la línea se corrió hacia la izquierda del origen, que es justo lo necesario para que una fuerza que apunta arriba-derecha produzca un giro *horario* alrededor de O .

Chequeo de sentido común

Dos comprobaciones:

1. La pendiente de la línea que pasa por $(-0,2598; 0)$ y $(0; 0,45)$ vale $\frac{0,45}{0,2598} = 1,7321 = \tan 60^\circ$. ✓ La nueva línea es paralela a $\vec{\mathbf{R}}$, como tiene que ser.
2. Distancia de O a la nueva línea: $d = \frac{|M_O|}{|\vec{\mathbf{R}}|} = \frac{90}{400} = 0,225 \text{ m}$, menor que los $0,2598 \text{ m}$ y que los $0,45 \text{ m}$ de los cortes, como debe ser una perpendicular frente a dos oblicuas. ✓

Cuándo NO se puede reducir a una sola fuerza

Esta reducción funciona porque en el plano $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{M}}_O$ son siempre perpendiculares (la fuerza está en el plano, el momento sale del plano). En el espacio eso puede fallar: si $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} \neq 0$ el sistema *no* se reduce a una sola fuerza y hay que usar el torsor. Ese es exactamente el tema del Taller 3.

Problema 2.5 — Reemplazar un par por otro equivalente

Ruta de solución

Dos pares son equivalentes si tienen el mismo vector momento, sin importar con qué fuerzas ni a qué distancia se hagan. Como el momento vale $M = Fd$, si me fijan d solo queda despejar F .

PASO 1 La relación que gobierna todo

$$M = Fd \quad \Rightarrow \quad F = \frac{M}{d}$$

PASO 2 (a) Fuerzas en E y F , separadas $0,40 \text{ m}$

$$F = \frac{24 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,40 \text{ m}} = 60 \text{ N}$$

PASO 3 (b) Fuerzas en G y H , separadas $0,15 \text{ m}$

$$F = \frac{24 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,15 \text{ m}} = 160 \text{ N}$$

PASO 4 Sentido de las fuerzas

En los dos casos el par original es **horario**, así que en cada pareja la fuerza de la izquierda debe apuntar hacia abajo y la de la derecha hacia arriba (o al revés, según cómo estén ubicadas): lo que importa es que el giro resultante sea horario.

Respuesta: $F = 60 \text{ N}$ en E y F ; $F = 160 \text{ N}$ en G y H . Los tres pares —el original de $24 \text{ N} \cdot \text{m}$ y los dos reemplazos— producen exactamente el mismo efecto sobre la placa.

La relación es inversa, y eso se siente en la vida real

Menos distancia obliga a más fuerza. Es la misma razón por la que aflojar una tuerca con una llave corta cuesta mucho más que con una llave larga: el momento que necesitas es el mismo, y si acortas el brazo tienes que compensar con fuerza. Aquí, reducir la separación de 0,40 a 0,15 m (a poco más de un tercio) casi triplica la fuerza necesaria.

Chequeo de sentido común

Multiplica de vuelta: $60 \times 0,40 = 24 \text{ N} \cdot \text{m}$ ✓ y $160 \times 0,15 = 24 \text{ N} \cdot \text{m}$ ✓. Los dos reproducen el par original.

Problema 2.6 — Nivel parcial: bloque con fuerza y par**Ruta de solución**

Hay dos cosas que trasladar, y cada una se comporta distinto. La **fuerza** se copia a H y genera un par nuevo igual a $\vec{r}_{H \rightarrow P} \times \vec{F}$. El **par** que ya existía es un vector libre: se copia tal cual, sin generar nada. Al final sumo los dos momentos.

PASO 1 La fuerza en componentes

$$\vec{r}_{P \rightarrow Q} = (2 - 0)\hat{i} + (3 - 6)\hat{j} + (9 - 3)\hat{k} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{P \rightarrow Q}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \text{ m}$$

$$\vec{F} = \frac{630}{7}(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 90(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 La fuerza resultante del sistema equivalente

Trasladar no cambia la fuerza, y el par no aporta fuerza ninguna:

$$\boxed{\vec{R} = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k} \quad [\text{N}]} \quad |\vec{R}| = 630 \text{ N}$$

PASO 3 El par que genera el traslado de la fuerza

$$\vec{r}_{H \rightarrow P} = (0 - 4)\hat{i} + (6 - 0)\hat{j} + (3 - 0)\hat{k} = -4\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (6)(540) - (3)(-270) = 3240 + 810 = 4050$$

$$M_y = (3)(180) - (-4)(540) = 540 + 2160 = 2700$$

$$M_z = (-4)(-270) - (6)(180) = 1080 - 1080 = 0$$

$$\vec{r}_{H \rightarrow P} \times \vec{F} = 4050\hat{i} + 2700\hat{j} + 0\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 Suma el par que ya existía

El par $\vec{M} = 150\hat{j} - 200\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ es un vector libre: entra directo a la suma, sin producto cruz y sin depender de dónde esté aplicado.

$$\vec{M}_H = (4050\hat{i} + 2700\hat{j} + 0\hat{k}) + (0\hat{i} + 150\hat{j} - 200\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{M}_H = 4050\hat{i} + 2850\hat{j} - 200\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]}$$

$$|\vec{\mathbf{M}}_H| = \sqrt{4050^2 + 2850^2 + 200^2} = \sqrt{24\,565\,000} = 4956,31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: El sistema equivalente en H es $\vec{\mathbf{R}} = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k}$ N junto con $\vec{\mathbf{M}}_H = 4050\hat{i} + 2850\hat{j} - 200\hat{k}$ N·m (magnitud 4956,31 N·m). Desde el punto de vista del bloque, esto produce exactamente el mismo efecto que la fuerza de 630 N en P más el par original.

El par no se traslada: se copia

Este es el error específico de este tipo de problema. Mucha gente calcula $\vec{\mathbf{r}}_{H \rightarrow P} \times \vec{\mathbf{M}}$ o intenta “mover” el par. No hay nada que mover: un par es un vector libre, su momento es el mismo en todo punto del cuerpo, y por eso pasa a la suma final sin modificarse. Solo la **fuerza** genera un par nuevo al cambiar de punto de aplicación.

Chequeo de sentido común

Haz el camino de vuelta: traslada el sistema de H otra vez a P . Debería aparecer solo el par original.

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \vec{\mathbf{M}}_H + \vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow H} \times \vec{\mathbf{R}} \quad \text{con} \quad \vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow H} = 4\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$M_x = (-6)(540) - (-3)(-270) = -3240 - 810 = -4050$$

$$M_y = (-3)(180) - (4)(540) = -540 - 2160 = -2700$$

$$M_z = (4)(-270) - (-6)(180) = -1080 + 1080 = 0$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P = (4050 - 4050)\hat{i} + (2850 - 2700)\hat{j} + (-200 + 0)\hat{k} = 150\hat{j} - 200\hat{k}$$

Exactamente el par original. ✓ Si esta ida y vuelta no cierra, hay un error de signo en alguna parte.

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 2

2.1	$M_A = M_P = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$ (horario); $d = 0,14 \text{ m}$
2.2	$\vec{\mathbf{F}} = 200\hat{i} - 100\hat{j} + 200\hat{k} \text{ N}$; $\vec{\mathbf{M}} = 60\hat{i} + 80\hat{j} - 20\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, $ \vec{\mathbf{M}} = 101,98 \text{ N} \cdot \text{m}$; $d = 0,340 \text{ m}$
2.3	$\vec{\mathbf{R}} = -1,0\hat{i} - 2,4\hat{j} \text{ kN}$ en los dos casos; $M_A = -6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $M_B = -3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$
2.4	$\vec{\mathbf{R}} = 200\hat{i} + 346,41\hat{j} \text{ N}$; corta el eje x en $-0,2598 \text{ m}$ y el eje y en $0,45 \text{ m}$; $d = 0,225 \text{ m}$ del origen
2.5	(a) $F = 60 \text{ N}$; (b) $F = 160 \text{ N}$
2.6	$\vec{\mathbf{R}} = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k} \text{ N}$ (630 N); $\vec{\mathbf{M}}_H = 4050\hat{i} + 2850\hat{j} - 200\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ (4956,31 N · m)

Lo que tiene que quedarte de este taller

1. Un par no empuja: suma de fuerzas cero, momento igual en todo punto.
2. Trasladar una fuerza: la fuerza se copia idéntica y aparece $\vec{\mathbf{r}}_{\text{nuevo} \rightarrow \text{viejo}} \times \vec{\mathbf{F}}$.
3. Un par que ya existía se copia tal cual al sistema equivalente: no genera nada nuevo.
4. En el plano, fuerza-par siempre se puede volver a reducir a una sola fuerza corrida de sitio. En el espacio, no siempre: ahí aparece el torsor.

TALLER 3

Sistemas equivalentes, resultantes y llave de torsión

Semana del programa: Semana 3, clases 1 y 2 • Tiempo sugerido: 5 horas

1. Lo que necesitas de este tema

La reducción: todo sistema cabe en dos vectores

Tengas las fuerzas que tengas —dos, siete, cuarenta— siempre puedes reemplazarlas por **una sola fuerza y un solo par** aplicados en el punto O que tú escojas:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \quad \vec{M}_O = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum \vec{M}_{\text{pares}}$$

$\vec{R}$ **no depende** del punto O : es siempre la misma suma. $\vec{M}_O$ **sí depende**: si cambias de punto, cambia. Los pares que ya existían entran directo a la suma, sin producto cruz (Taller 2).

Los cuatro casos posibles

Una vez tienes $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$, el sistema es de uno de estos cuatro tipos:

Condición	El sistema equivale a	Nombre
$\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0$	nada: el cuerpo está en equilibrio	equilibrio
$\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$	solo un par (mismo en todo punto)	par puro
$\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$	una <i>sola</i> fuerza corrida de sitio	fuerza única
$\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$	fuerza + par <i>paralelo</i> a ella	torsor

El producto punto $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ es la prueba que decide. Hazla siempre antes de empezar a reducir: te dice a qué caso te enfrentas.

Caso “fuerza única”: dónde queda la línea de acción

Se busca el punto $\vec{r}$ tal que la fuerza sola reproduzca el momento:

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$$

En 2D esto es una sola ecuación, $xR_y - yR_x = M_O$, que describe la nueva línea de acción. En 3D es un sistema; se resuelve fijando una coordenada (por ejemplo $z = 0$) para pedir el corte con un plano.

Caso torsor: la llave de torsión

Cuando $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$ no hay manera de quitar el par. Lo que sí se puede es dejar **el par alineado con la fuerza**: eso es un torsor o llave de torsión, como un destornillador (empuja y gira alrededor del mismo eje).

Se construye en cuatro pasos:

$$\hat{\lambda} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \quad M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda} \quad \boxed{p = \frac{M_{\parallel}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}} \quad \vec{M}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda}$$

El número p es el **paso** del torsor, y se mide en metros. Lo que sobra,

$$\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}},$$

es la parte que sí se puede eliminar corriendo la fuerza. El **eje del torsor** es el conjunto de puntos $\vec{r}$ que cumplen

$$\boxed{\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_{\perp}}$$

Cómo pedirle al eje que corte un plano

Si te piden dónde el eje del torsor atraviesa el plano xz , pon $y = 0$ en $\vec{r} = (x; y; z)$ y resuelve $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_{\perp}$. Quedan tres ecuaciones con dos incógnitas, pero **una es combinación de las otras dos**: si las tres no son compatibles, hay un error aritmético antes. Esa redundancia es tu mejor verificación.

Los tres errores que hunden el punto 3 del parcial

1. Calcular $\vec{M}_O$ olvidando los pares que ya venían aplicados. Entran a la suma sin producto cruz.
2. Usar $\vec{R}$ sin normalizar al proyectar. El paso es $p = \vec{M}_O \cdot \vec{R} / |\vec{R}|^2$, con el cuadrado abajo. Si usas $|\vec{R}|$ a la primera potencia te queda $M_{\parallel}$, no p : son cosas distintas y las unidades lo delatan (N · m contra m).
3. Buscar el eje con $\vec{M}_O$ en vez de con $\vec{M}_{\perp}$. La ecuación $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$ *no tiene solución* cuando hay torsor, justamente porque $\vec{M}_O$ tiene una componente paralela a $\vec{R}$ y un producto cruz nunca puede dar algo paralelo a $\vec{R}$.

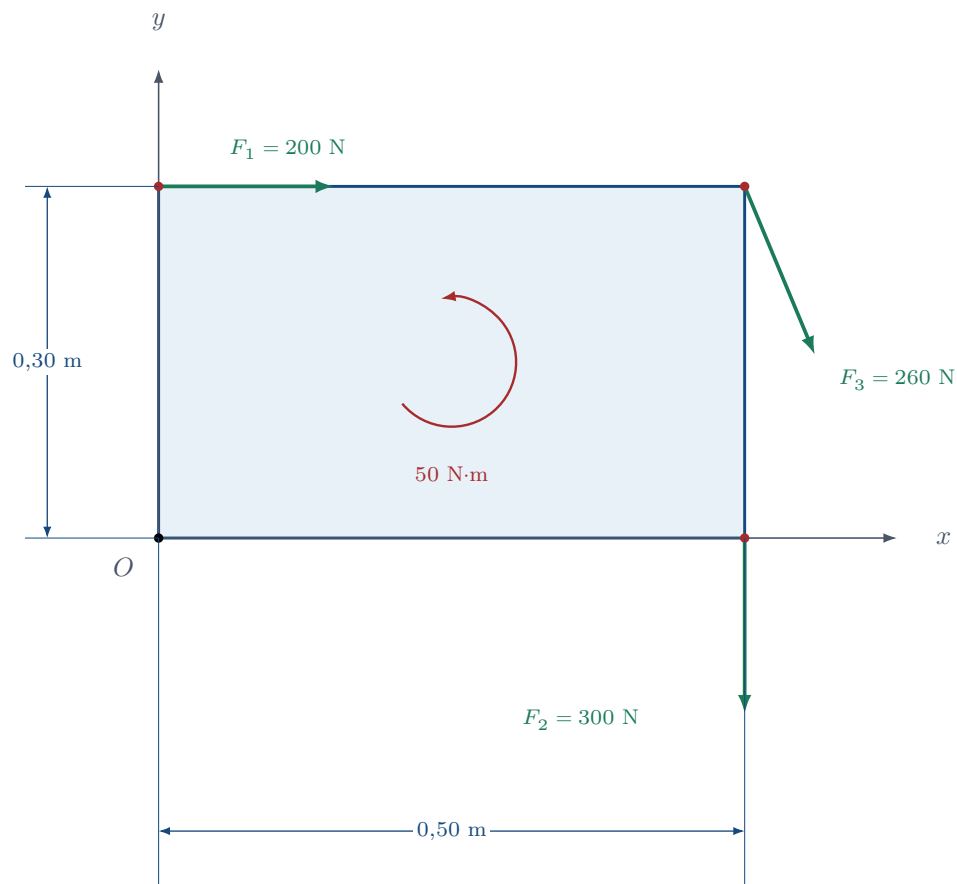
PARTE A — Enunciados

Problema 3.1 — Sistema coplanar sobre una placa

Sobre la placa actúan tres fuerzas y un par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ antihorario:

- $\vec{F}_1 = 200 \hat{i} \text{ N}$ aplicada en $(0; 0,30) \text{ m}$;
- $\vec{F}_2 = -300 \hat{j} \text{ N}$ aplicada en $(0,50; 0) \text{ m}$;
- $\vec{F}_3 = 100 \hat{i} - 240 \hat{j} \text{ N}$ (o sea 260 N) aplicada en $(0,50; 0,30) \text{ m}$.

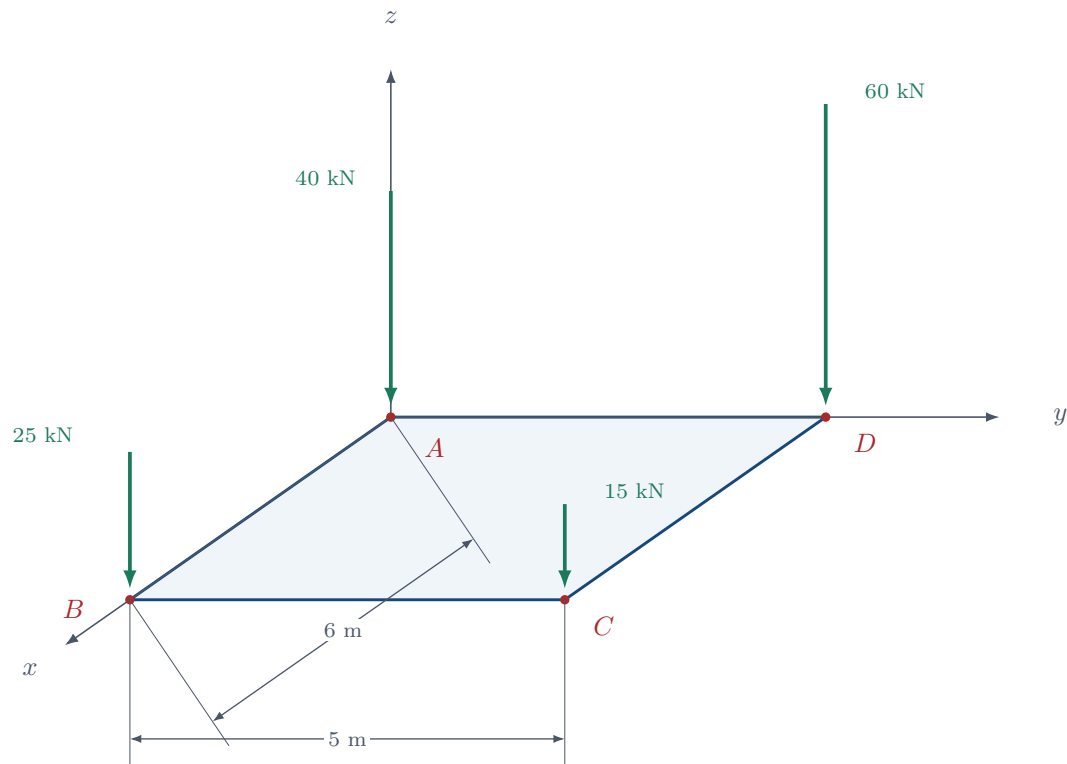
- (a) Reduce el sistema a una fuerza y un par en el origen O .
- (b) Reduce el sistema a una sola fuerza y determina dónde su línea de acción corta los ejes x y y .



Problema 3.2 — Losa con cuatro columnas

Una losa rectangular recibe las cargas verticales de cuatro columnas: 40 kN en $A(0; 0)$, 25 kN en $B(6; 0)$, 15 kN en $C(6; 5)$ y 60 kN en $D(0; 5)$, todas hacia abajo y con las coordenadas en metros.

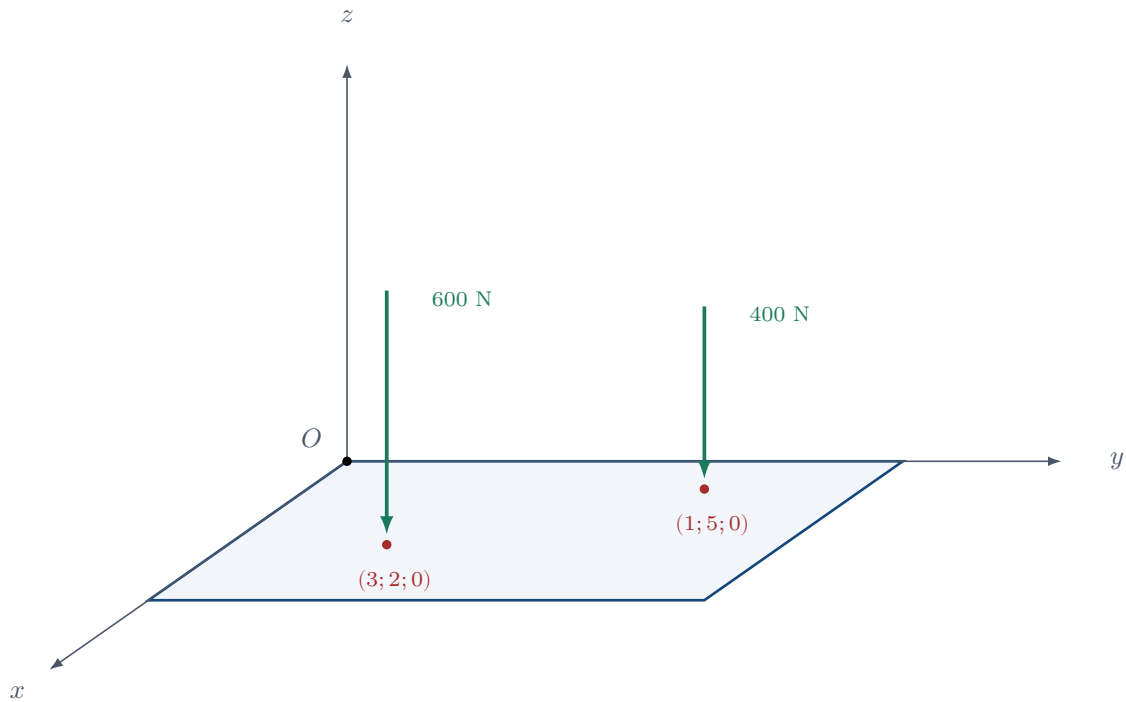
Determina la magnitud de la resultante y el punto del piso por donde pasa su línea de acción.



Problema 3.3 — Dos fuerzas paralelas en el espacio

Dos fuerzas verticales hacia abajo actúan sobre una plataforma horizontal: 600 N en (3; 2; 0) m y 400 N en (1; 5; 0) m.

- Reduce el sistema a una fuerza y un par en el origen.
- Comprueba con el producto punto que el sistema *sí* se reduce a una sola fuerza, y determina por qué punto del plano xy pasa.

**Problema 3.4 — Torsor a partir de la reducción**

Después de reducir cierto sistema al origen se obtuvo

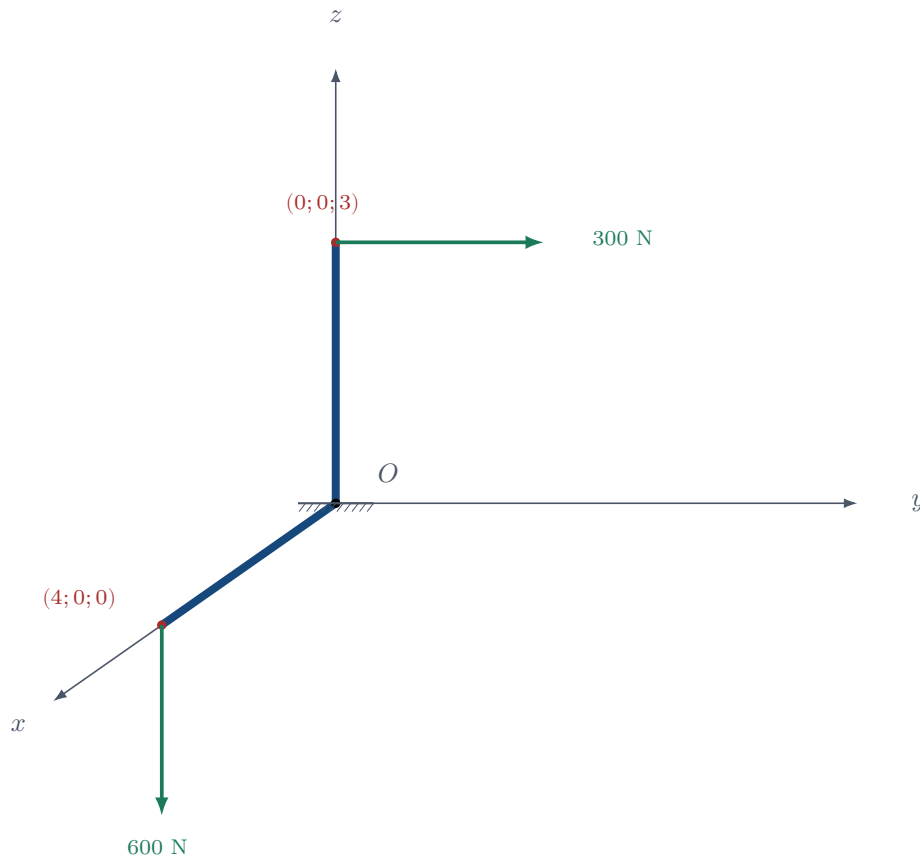
$$\vec{\mathbf{R}} = 400 \hat{k} \text{ N} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{M}}_O = 300 \hat{i} + 800 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

- Comprueba que el sistema **no** se reduce a una sola fuerza.
- Determina el paso del torsor y el momento del torsor.
- Determina el punto donde el eje del torsor atraviesa el plano xy .

Problema 3.5 — Torsor de dos fuerzas que se cruzan

Sobre la estructura actúan dos fuerzas: una de 600 N hacia abajo aplicada en el extremo del brazo horizontal, en $(4; 0; 0)$ m, y otra de 300 N en dirección $+y$ aplicada en el tope del mástil, en $(0; 0; 3)$ m.

- (a) Reduce el sistema a una fuerza y un par en O .
- (b) Determina la llave de torsión equivalente: su paso y su momento.
- (c) Determina dónde el eje del torsor corta el plano xy .

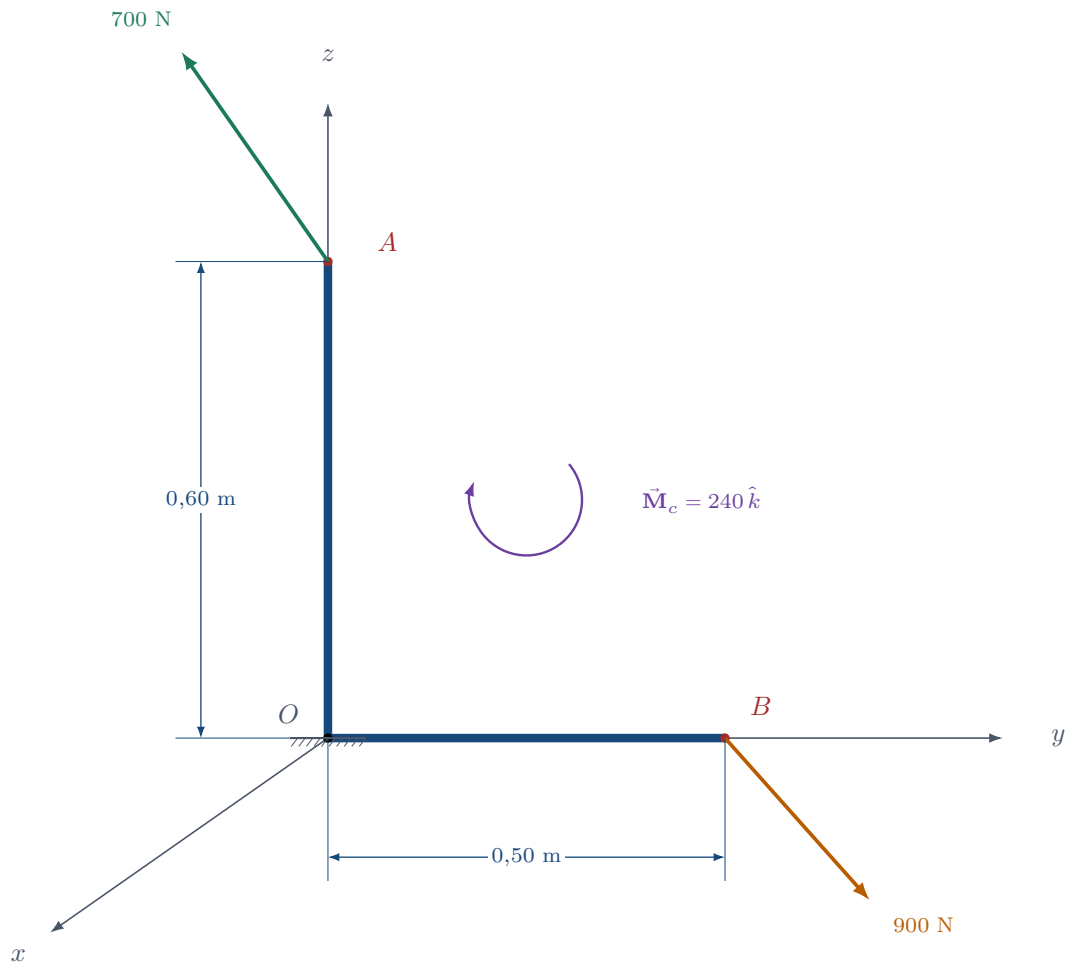


Problema 3.6 — Nivel parcial: llave de torsión completa

El soporte en L de la figura tiene un brazo vertical OA de 0,60 m y un brazo horizontal OB de 0,50 m. Sobre él actúan:

- una fuerza de 700 N aplicada en $A(0; 0; 0,60)$ m, con cosenos directores $(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7})$;
- una fuerza de 900 N aplicada en $B(0; 0,50; 0)$ m, con cosenos directores $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$;
- un par de momento $\vec{M}_c = 240 \hat{k}$ N·m.

Si es posible, reduce el sistema a una llave de torsión, indica su paso y determina el punto donde el eje de la llave interseca el plano xz .



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 3.1 — Sistema coplanar sobre una placa

Ruta de solución

Sumo las tres fuerzas componente a componente: eso es $\vec{\mathbf{R}}$ y no depende de nada más. Luego sumo los momentos de las tres respecto a O y le agrego el par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ tal cual. Con $\vec{\mathbf{R}}$ y M_O en la mano, pido que una sola fuerza reproduzca ese momento y despejo dónde corta cada eje.

PASO 1 Suma de fuerzas

$$R_x = 200 + 0 + 100 = 300 \text{ N} \quad R_y = 0 - 300 - 240 = -540 \text{ N}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{i} - 540\hat{j} \quad [\text{N}]} \quad |\vec{\mathbf{R}}| = \sqrt{90\,000 + 291\,600} = \sqrt{381\,600} = 617,74 \text{ N}$$

PASO 2 Momento de cada fuerza respecto a O

Con $M_O = r_x F_y - r_y F_x$, una fuerza a la vez:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 \text{ en } (0; 0,30) : (0)(0) - (0,30)(200) = -60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_2 \text{ en } (0,50; 0) : (0,50)(-300) - (0)(0) = -150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_3 \text{ en } (0,50; 0,30) : (0,50)(-240) - (0,30)(100) = -120 - 30 = -150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 3 Agrega el par que ya venía aplicado

El par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ antihorario entra con signo positivo, sin producto cruz:

$$M_O = -60 - 150 - 150 + 50$$

$$\boxed{M_O = -310 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

PASO 4 Reduce a una sola fuerza

En el plano $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{M}}_O$ siempre son perpendiculares (uno está en el plano, el otro sale de él), así que el sistema *siempre* se puede reducir a una sola fuerza. Pido que la fuerza sola, aplicada en $(x; y)$, dé el mismo momento:

$$x R_y - y R_x = M_O \quad \Rightarrow \quad -540x - 300y = -310$$

PASO 5 Cortes con los ejes

$$\text{Con } y = 0: \quad -540x = -310 \Rightarrow x = 0,5741 \text{ m}$$

$$\text{Con } x = 0: \quad -300y = -310 \Rightarrow y = 1,0333 \text{ m}$$

Respuesta: El sistema equivale a $\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{i} - 540\hat{j} \text{ N}$ (617,74 N) junto con un par de $310 \text{ N} \cdot \text{m}$ horario en O ; y también, de forma exacta, a la **sola** fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ actuando sobre la línea que corta el eje x en $x = 0,5741 \text{ m}$ y el eje y en $y = 1,0333 \text{ m}$. Los dos cortes son positivos: la línea de acción pasa por el primer cuadrante, a la derecha y por encima de O , que es lo que hace falta para que una fuerza que apunta hacia abajo-derecha gire la placa en sentido horario.

El par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ no se multiplica por ninguna distancia

El error clásico aquí es tratar el par como si fuera una fuerza y buscarle un brazo. El par ya es un momento: entra a la suma con su signo y nada más. Y ojo con ese signo: es antihorario (+50), así que *resta* magnitud al momento total, que era horario. Sin él, M_O valdría $-360 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Chequeo de sentido común

La distancia perpendicular de O a la línea de acción vale $d = |M_O|/|\vec{\mathbf{R}}| = 310/617,74 = 0,5018 \text{ m}$. Tiene que ser menor que los dos cortes (0,5741 y 1,0333), porque la perpendicular es más corta que cualquier oblicua. ✓

Y comprueba el corte en x directamente: una fuerza (300; -540) aplicada en (0,5741; 0) da $M_O = (0,5741)(-540) - (0)(300) = -310 \text{ N} \cdot \text{m}$. ✓

Problema 3.2 — Losa con cuatro columnas**Ruta de solución**

Todas las cargas son paralelas (verticales hacia abajo), así que la resultante también es vertical y el sistema se reduce siempre a una sola fuerza. Para ubicarla uso el mismo principio de siempre: el momento de la resultante tiene que ser igual a la suma de los momentos de las cargas, y eso da un promedio ponderado.

PASO 1 La resultante

$$R = 40 + 25 + 15 + 60 = 140 \text{ kN} \quad \text{hacia abajo} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{R}} = -140 \hat{k} \text{ kN}$$

PASO 2 Momento respecto al eje y : da la coordenada $\bar{x}$

Igualo el momento de la resultante al de las cuatro cargas:

$$R \bar{x} = \sum W_i x_i = (40)(0) + (25)(6) + (15)(6) + (60)(0) = 150 + 90 = 240 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{x} = \frac{240}{140} = 1,7143 \text{ m}$$

PASO 3 Momento respecto al eje x : da la coordenada $\bar{y}$

$$R \bar{y} = \sum W_i y_i = (40)(0) + (25)(0) + (15)(5) + (60)(5) = 75 + 300 = 375 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{y} = \frac{375}{140} = 2,6786 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{\mathbf{R}} = 140 \text{ kN}$ hacia abajo, con línea de acción por el punto (1,7143; 2,6786; 0) m. Ese punto está claramente corrido hacia la esquina D , y tiene que ser así: D soporta 60 kN, la carga más grande de las cuatro.

Es el mismo cálculo de un centro de gravedad

La fórmula $\bar{x} = \sum W_i x_i / \sum W_i$ es literalmente la del centroide, con las cargas haciendo de “pesos”. Cuando llegues a centroides en la semana 9 vas a reconocer esta cuenta: es la misma idea con integrales en lugar de sumas.

Chequeo de sentido común

El punto tiene que caer *dentro* de la losa: $0 \leq 1,7143 \leq 6$ y $0 \leq 2,6786 \leq 5$. ✓ Siempre ocurre cuando todas las cargas apuntan hacia el mismo lado. Si te saliera un punto fuera de la losa con todas las cargas hacia abajo, hay un error seguro.

Segundo chequeo, ahora vectorial: $\vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = -375\hat{i} + 240\hat{j} \text{ kN} \cdot \text{m}$, y $(1,7143; 2,6786; 0) \times (0; 0; -140) = -375\hat{i} + 240\hat{j}$. ✓ Coinciden.

Problema 3.3 — Dos fuerzas paralelas en el espacio**Ruta de solución**

Reduzco primero al origen con la definición. Luego hago la prueba del producto punto para confirmar que no hay torsor, y por último resuelvo $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$ para encontrar por dónde pasa la fuerza única.

PASO 1 Reducción al origen

$$\vec{R} = (0; 0; -600) + (0; 0; -400) = -1000\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{M}_O = (3; 2; 0) \times (0; 0; -600) + (1; 5; 0) \times (0; 0; -400)$$

Primer producto cruz:

$$M_x = (2)(-600) - (0)(0) = -1200, \quad M_y = (0)(0) - (3)(-600) = 1800, \quad M_z = 0$$

Segundo:

$$M_x = (5)(-400) - (0)(0) = -2000, \quad M_y = (0)(0) - (1)(-400) = 400, \quad M_z = 0$$

$$\vec{M}_O = -3200\hat{i} + 2200\hat{j} \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

PASO 2 La prueba que decide el caso

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-3200)(0) + (2200)(0) + (0)(-1000) = 0$$

Da cero: el sistema **sí** se reduce a una sola fuerza. No hay torsor.

PASO 3 Dónde pasa esa fuerza única

Busco $\vec{r} = (x; y; 0)$ tal que $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$:

$$(x; y; 0) \times (0; 0; -1000) = (-1000y; 1000x; 0)$$

Igualo componente a componente:

$$-1000y = -3200 \Rightarrow y = 3,2 \text{ m} \quad 1000x = 2200 \Rightarrow x = 2,2 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{R} = 1000 \text{ N}$ hacia abajo, aplicada en el punto $(2,2; 3,2; 0) \text{ m}$.

Verificación con el promedio ponderado

Como las dos fuerzas son paralelas, el punto tiene que ser el promedio pesado:

$$\bar{x} = \frac{(3)(600) + (1)(400)}{1000} = \frac{2200}{1000} = 2,2 \quad \bar{y} = \frac{(2)(600) + (5)(400)}{1000} = \frac{3200}{1000} = 3,2$$

Los dos caminos coinciden. Este atajo solo sirve con fuerzas paralelas; el producto cruz sirve siempre.

Que $M_z = 0$ no es casualidad

Las dos fuerzas apuntan en $-\hat{k}$, así que ninguna puede girar la plataforma alrededor del eje z : son paralelas a ese eje. Por eso $M_z = 0$ en los dos productos cruz. Reconocerlo de entrada te evita hacer cuentas que ya sabes que van a dar cero.

Problema 3.4 — Torsor a partir de la reducción**Ruta de solución**

Ya me dan $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{M}}_O$, así que empiezo por la prueba del producto punto. Como va a dar distinto de cero, sigo la receta del torsor: unitario, proyección, paso, y por último la ecuación del eje usando $\vec{\mathbf{M}}_\perp$ (no $\vec{\mathbf{M}}_O$).

PASO 1 La prueba

$$\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = (300)(0) + (0)(0) + (800)(400) = 320\,000 \neq 0$$

No es cero: **hay torsor**. Es imposible eliminar el par por completo.

PASO 2 Unitario de la resultante

$$|\vec{\mathbf{R}}| = 400 \text{ N} \quad \hat{\lambda} = \frac{400 \hat{k}}{400} = \hat{k}$$

PASO 3 Parte del momento que sobrevive: la paralela

$$M_\parallel = \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \hat{\lambda} = (300)(0) + (0)(0) + (800)(1) = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 800 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m} \quad p = \frac{M_\parallel}{|\vec{\mathbf{R}}|} = \frac{800 \text{ N} \cdot \text{m}}{400 \text{ N}} = 2,00 \text{ m}$$

PASO 4 Parte que sí se puede eliminar: la perpendicular

$$\vec{\mathbf{M}}_\perp = \vec{\mathbf{M}}_O - \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = (300; 0; 800) - (0; 0; 800) = 300 \hat{i} \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 5 El eje del torsor

Busco $\vec{\mathbf{r}} = (x; y; 0)$ con $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_\perp$:

$$(x; y; 0) \times (0; 0; 400) = (400y; -400x; 0) = (300; 0; 0)$$

$$400y = 300 \Rightarrow y = 0,75 \text{ m} \quad -400x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Respuesta: El sistema **no** se reduce a una sola fuerza. La llave de torsión equivalente tiene $\vec{R} = 400\hat{k}$ N y $\vec{M}_{\text{torsor}} = 800\hat{k}$ N·m, con paso $p = 2,00$ m, y su eje es la recta paralela al eje z que pasa por $(0; 0,75; 0)$ m. En otras palabras: el sistema completo equivale a empujar 400 N hacia arriba a lo largo de esa recta mientras se aplica un giro de $800 \text{ N} \cdot \text{m}$ alrededor de ella misma, como un tornillo.

Unidades: el paso son metros, el momento son newton-metro

$M_{\parallel} = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $p = 2,00 \text{ m}$ son dos cosas distintas, aunque salgan una de la otra. El paso dice cuánto avanzaría el “tornillo” por radián de giro. Si en el parcial te piden “el paso del torsor” y entregas $800 \text{ N} \cdot \text{m}$, la respuesta está mal aunque el número esté bien calculado.

Chequeo de sentido común

Reconstruye el momento original desde el torsor:

$$\vec{M}_O \stackrel{?}{=} \vec{M}_{\text{torsor}} + \vec{r} \times \vec{R} = 800\hat{k} + (0; 0,75; 0) \times (0; 0; 400) = 800\hat{k} + 300\hat{i}$$

que es exactamente $(300; 0; 800)$. ✓

Problema 3.5 — Torsor de dos fuerzas que se cruzan

Ruta de solución

Ahora tengo que construir la reducción yo mismo antes de aplicar la receta del torsor. Sumo las dos fuerzas, tomo momentos respecto a O , hago la prueba del producto punto y sigo con unitario, paso, momento del torsor y ecuación del eje.

PASO 1 Reducción al origen

$$\vec{R} = (0; 0; -600) + (0; 300; 0) = 300\hat{j} - 600\hat{k} \text{ N} \quad |\vec{R}| = \sqrt{90\,000 + 360\,000} = 670,82 \text{ N}$$

$$\vec{M}_O = (4; 0; 0) \times (0; 0; -600) + (0; 0; 3) \times (0; 300; 0)$$

Primer producto: $M_x = (0)(-600) - (0)(0) = 0$, $M_y = (0)(0) - (4)(-600) = 2400$, $M_z = 0$.

Segundo: $M_x = (0)(0) - (3)(300) = -900$, $M_y = (3)(0) - (0)(0) = 0$, $M_z = 0$.

$$\vec{M}_O = -900\hat{i} + 2400\hat{j} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 2 La prueba

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-900)(0) + (2400)(300) + (0)(-600) = 720\,000 \neq 0$$

Hay torsor. Geométricamente tiene sentido: las dos líneas de acción *se cruzan sin cortarse* en el espacio, y ese es justamente el caso en que aparece el torsor.

PASO 3 Unitario, proyección y paso

$$\hat{\lambda} = \frac{(0; 300; -600)}{670,82} = (0; 0,4472; -0,8944)$$

$$M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda} = (-900)(0) + (2400)(0,4472) + (0)(-0,8944) = 1073,31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$p = \frac{M_{\parallel}}{|\vec{R}|} = \frac{1073,31}{670,82} = 1,600 \text{ m}$$

PASO 4 Momento del torsor y momento perpendicular

$$\vec{M}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda} = 1073,31 (0; 0,4472; -0,8944) = (0; 480; -960) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}} = (-900 - 0; 2400 - 480; 0 + 960) = (-900; 1920; 960) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 5 El eje del torsor y su corte con el plano xy

Con $\vec{r} = (x; y; 0)$:

$$(x; y; 0) \times (0; 300; -600) = (-600y; 600x; 300x)$$

Igualo a $\vec{M}_{\perp}$ componente a componente:

$$-600y = -900 \Rightarrow y = 1,5 \text{ m} \quad 600x = 1920 \Rightarrow x = 3,2 \text{ m} \quad 300x = 960 \Rightarrow x = 3,2 \text{ m}$$

Respuesta: La llave de torsión tiene $\vec{R} = 300\hat{j} - 600\hat{k}$ N (670,82 N) y $\vec{M}_{\text{torsor}} = 480\hat{j} - 960\hat{k}$ N·m, con paso $p = 1,600$ m. Su eje corta el plano xy en el punto (3,2; 1,5; 0) m. Fíjate en que $\vec{M}_{\text{torsor}}$ es exactamente p veces $\vec{R}$: $1,6 \times (0; 300; -600)$ da $(0; 480; -960)$; por eso se llama “llave”, empuja y gira alrededor del mismo eje.

La tercera ecuación es gratis y es tu verificación

Las dos últimas ecuaciones del paso 5 dan la misma incógnita x , y dieron el mismo valor 3,2. Eso no es redundancia inútil: es la prueba de que $\vec{M}_{\perp}$ está bien calculado. Si las dos dieran valores distintos, el error está en el paso 4 (casi siempre en la proyección).

Chequeo de sentido común

$\vec{M}_{\text{torsor}}$ tiene que ser paralelo a $\vec{R}$, así que su producto cruz debe ser cero: $(0; 480; -960) \times (0; 300; -600)$ da $(480(-600) - (-960)(300); (-960)(0) - (0)(-600); (0)(300) - (480)(0)) = (0; 0; 0)$. ✓

Y $\vec{M}_{\perp}$ tiene que ser perpendicular a $\vec{R}$: $(-900)(0) + (1920)(300) + (960)(-600) = 576\,000 - 576\,000 = 0$. ✓

Problema 3.6 — Nivel parcial: llave de torsión completa

Ruta de solución

Este es el punto 3 típico del parcial, completo: dos fuerzas dadas por cosenos directores, un par aplicado, y la pregunta por el punto donde el eje del torsor corta un plano. La secuencia es siempre la misma y conviene escribirla en la hoja antes de calcular: $\vec{F}_i \rightarrow \vec{R} \rightarrow \vec{M}_O$ (¡sin olvidar el par!) $\rightarrow$ prueba $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \rightarrow \hat{\lambda}$, $M_{\parallel}$, $p \rightarrow \vec{M}_{\perp} \rightarrow$ eje.

PASO 1 Las dos fuerzas en componentes

$$\vec{F}_1 = 700 \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7} \right) = 100 (2; -3; 6) = 200\hat{i} - 300\hat{j} + 600\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = 900 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) = 300 (1; 2; -2) = 300 \hat{i} + 600 \hat{j} - 600 \hat{k} \text{ N}$$

PASO 2 La resultante

$$\vec{R} = (200 + 300) \hat{i} + (-300 + 600) \hat{j} + (600 - 600) \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 500 \hat{i} + 300 \hat{j} \text{ [N]}} \quad |\vec{R}| = \sqrt{250\,000 + 90\,000} = \sqrt{340\,000} = 583,10 \text{ N}$$

La componente z se canceló sola: las dos fuerzas tienen $\pm 600 \text{ N}$ en $\hat{k}$.

PASO 3 Momento respecto a O

Con $\vec{r}_{O \rightarrow A} = 0,6 \hat{k}$ y $\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0,5 \hat{j}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O \rightarrow A} \times \vec{F}_1 &= (0; 0; 0,6) \times (200; -300; 600) \\ &= ((0)(600) - (0,6)(-300); (0,6)(200) - (0)(600); 0) = (180; 120; 0) \\ \vec{r}_{O \rightarrow B} \times \vec{F}_2 &= (0; 0,5; 0) \times (300; 600; -600) \\ &= ((0,5)(-600) - (0)(600); 0 - 0; (0)(600) - (0,5)(300)) = (-300; 0; -150) \end{aligned}$$

Y ahora el par aplicado, que entra tal cual:

$$\vec{M}_O = (180; 120; 0) + (-300; 0; -150) + (0; 0; 240)$$

$$\boxed{\vec{M}_O = -120 \hat{i} + 120 \hat{j} + 90 \hat{k} \text{ [N} \cdot \text{m]}}$$

PASO 4 ¿Hay torsor?

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-120)(500) + (120)(300) + (90)(0) = -60\,000 + 36\,000 = -24\,000 \neq 0$$

Distinto de cero: **sí hay torsor**. El sistema no se puede reducir a una sola fuerza.

PASO 5 Paso y momento del torsor

$$\hat{\lambda} = \frac{(500; 300; 0)}{583,10} = (0,8575; 0,5145; 0)$$

$$M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda} = (-120)(0,8575) + (120)(0,5145) + 0 = -102,90 + 61,74 = -41,16 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$p = \frac{M_{\parallel}}{|\vec{R}|} = \frac{-41,16}{583,10} = -0,0706 \text{ m}$$

$$\vec{M}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda} = -41,16 (0,8575; 0,5145; 0) = (-35,29; -21,18; 0) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 6 Momento perpendicular

$$\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}} = (-120 + 35,29; 120 + 21,18; 90 - 0) = (-84,71; 141,18; 90) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 7 Dónde el eje corta el plano xz

El plano xz es $y = 0$, así que busco $\vec{r} = (x; 0; z)$:

$$(x; 0; z) \times (500; 300; 0) = (-300z; 500z; 300x)$$

Igualo componente a componente:

$$300x = 90 \implies x = 0,300 \text{ m}$$

$$-300z = -84,71 \Rightarrow z = 0,2824 \text{ m}$$

$$(\text{tercera ecuación, de control}) \quad 500z = 500(0,2824) = 141,2 \approx 141,18 \quad \checkmark$$

Respuesta: El sistema **sí** se reduce a una llave de torsión: $\vec{\mathbf{R}} = 500\hat{i} + 300\hat{j}$ N (583,10 N) con $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = -35,29\hat{i} - 21,18\hat{j}$ N·m y paso $p = -0,0706$ m. El eje de la llave interseca el plano xz en el punto $P(0,300; 0; 0,2824)$ m. El paso salió **negativo**: el momento del torsor apunta en sentido contrario a $\vec{\mathbf{R}}$, o sea que la llave “desenrosca” en vez de enroscar.

No olvides el par de $240\hat{k}$

Si lo dejas fuera, $\vec{\mathbf{M}}_O$ te queda $(-120; 120; -150)$ en vez de $(-120; 120; 90)$. El producto punto $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}}$ sale igual (-24000) , porque $R_z = 0$ y el paso también, así que *no te darías cuenta*: el error solo aparece al final, en el punto del eje, donde x te daría $-0,500$ en lugar de $0,300$. Escribe los pares en la lista de aportes al momento *antes* de empezar a sumar.

Chequeo de sentido común

La verificación definitiva: reconstruye $\vec{\mathbf{M}}_O$ desde el torsor y el punto del eje.

$$\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = (-35,29; -21,18; 0) + (-84,71; 141,18; 90) = (-120; 120; 90)$$

Es exactamente el $\vec{\mathbf{M}}_O$ del paso 3. $\checkmark$

Y dos chequeos rápidos de magnitud: $|\vec{\mathbf{F}}_1| = \sqrt{200^2 + 300^2 + 600^2} = 700 \text{ N} \quad \checkmark$ y $|\vec{\mathbf{F}}_2| = \sqrt{300^2 + 600^2 + 600^2} = 900 \text{ N} \quad \checkmark$

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 3

3.1	$\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{i} - 540\hat{j}$ N (617,74 N); $M_O = -310$ N·m; corta el eje x en 0,5741 m y el eje y en 1,0333 m
3.2	$R = 140$ kN hacia abajo, por el punto (1,7143; 2,6786; 0) m
3.3	$\vec{\mathbf{R}} = -1000\hat{k}$ N; $\vec{\mathbf{M}}_O = -3200\hat{i} + 2200\hat{j}$ N·m; $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = 0 \Rightarrow$ una sola fuerza por (2,2; 3,2; 0) m
3.4	Hay torsor; $p = 2,00$ m; $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 800\hat{k}$ N·m; el eje corta el plano xy en (0; 0,75; 0) m
3.5	$\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{j} - 600\hat{k}$ N (670,82 N); $\vec{\mathbf{M}}_O = -900\hat{i} + 2400\hat{j}$ N·m; $p = 1,600$ m; $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 480\hat{j} - 960\hat{k}$ N·m; eje por (3,2; 1,5; 0) m
3.6	$\vec{\mathbf{R}} = 500\hat{i} + 300\hat{j}$ N (583,10 N); $\vec{\mathbf{M}}_O = -120\hat{i} + 120\hat{j} + 90\hat{k}$ N·m; $p = -0,0706$ m; $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = -35,29\hat{i} - 21,18\hat{j}$ N·m; el eje corta el plano xz en (0,300; 0; 0,2824) m

La secuencia que debes escribir apenas empiece el parcial

1. $\vec{\mathbf{F}}_i = F_i \hat{\lambda}_i$ para cada fuerza.
2. $\vec{\mathbf{R}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$.
3. $\vec{\mathbf{M}}_O = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i + \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{pares}}$.
4. Prueba: $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}}$. ¿Cero? Fuerza única. ¿No? Torsor.
5. Torsor: $\hat{\lambda} = \vec{\mathbf{R}}/|\vec{\mathbf{R}}|$, $M_{\parallel} = \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \hat{\lambda}$, $p = M_{\parallel}/|\vec{\mathbf{R}}|$, $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda}$.
6. $\vec{\mathbf{M}}_{\perp} = \vec{\mathbf{M}}_O - \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}}$.
7. Eje: $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_{\perp}$, fijando la coordenada del plano que te piden.
8. Verificación: $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}}$ debe devolver $\vec{\mathbf{M}}_O$.