

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá
 Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
 Principios de Estática 2016640

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 1

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

Duración: 100 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

Cómo hacer este simulacro

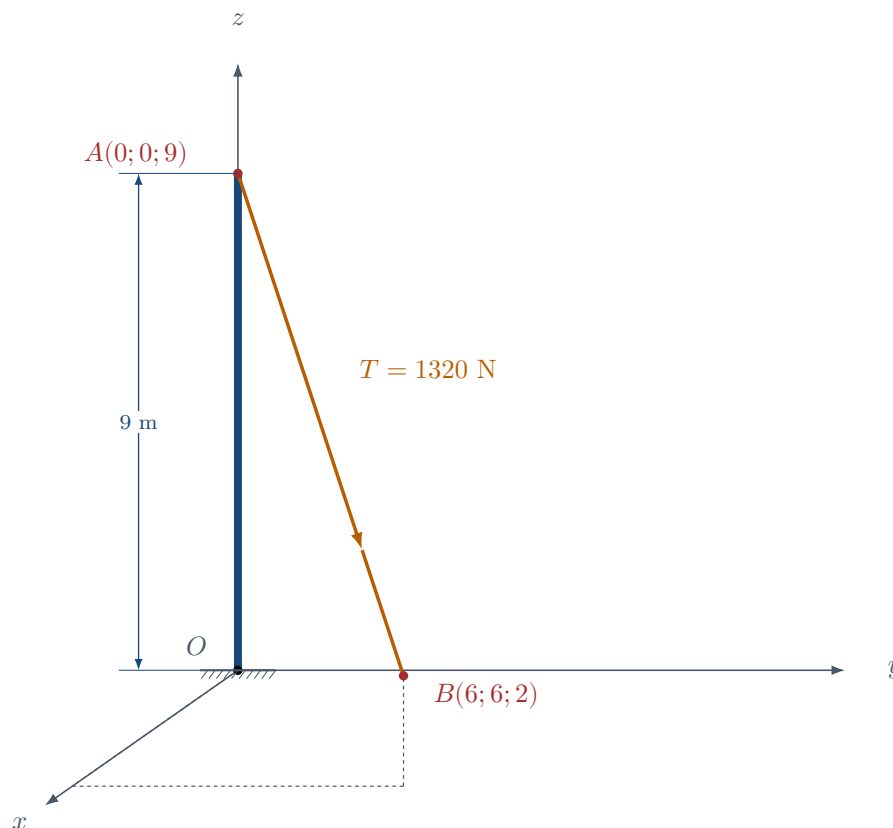
Ponte un cronómetro en 100 minutos y no lo pares. Hoja en blanco, calculadora y la hoja de fórmulas *solo si el profesor la permite en el parcial real*. **No mires el solucionario** hasta que se acabe el tiempo, aunque te trabes: aprender a quedarte trabado y seguir con el siguiente punto es parte de lo que se entrena aquí.

Este simulacro está calibrado al nivel de un parcial real. Los siguientes suben.

PUNTO 1 Pluma de grúa con cable (20 puntos)

La pluma vertical OA de una grúa mide 9 m. Un cable va desde su extremo $A(0; 0; 9)$ m hasta el anclaje $B(6; 6; 2)$ m y está tensionado a 1320 N.

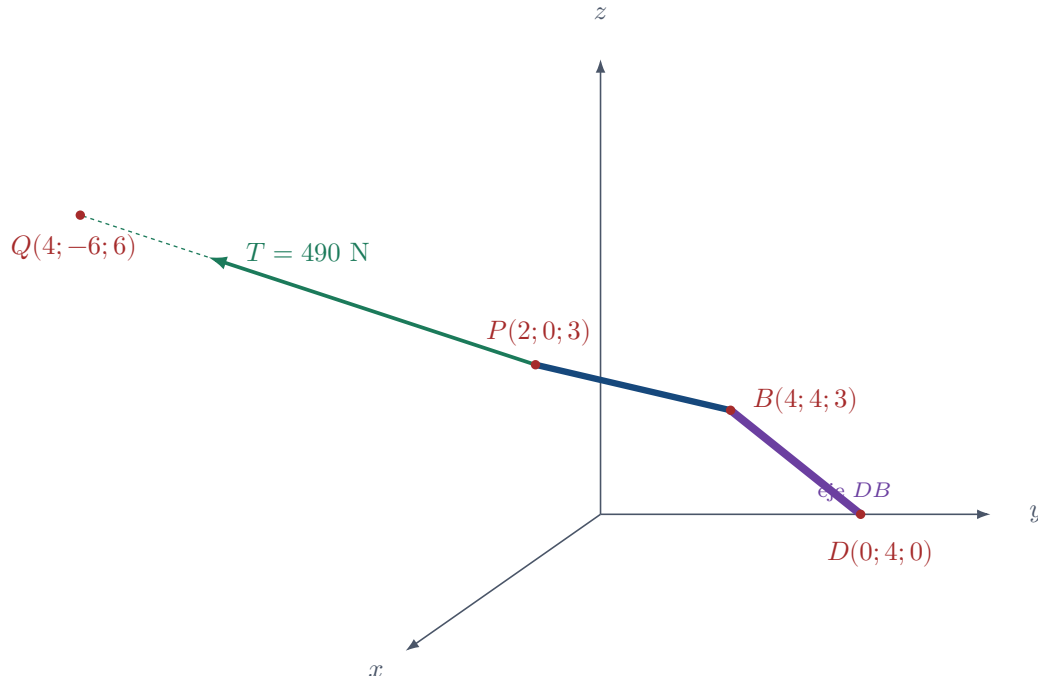
- Escribe como vector la fuerza que el cable ejerce sobre la pluma en A y determina sus ángulos directores.
- Determina el momento que esa fuerza produce respecto a la base O .
- Determina el momento respecto al eje x .



PUNTO 2 Momento respecto a una línea (20 puntos)

La barra doblada DBP está empotrada por el tramo DB , que va de $D(0; 4; 0)$ m a $B(4; 4; 3)$ m; de B sale el tramo BP hasta $P(2; 0; 3)$ m. En el extremo P se ata un cable que jala hacia $Q(4; -6; 6)$ m con una tensión de 490 N.

Determina el momento que esa tensión produce respecto a la línea DB .

**PUNTO 3** Llave de torsión (20 puntos)

Al reducir cierto sistema de fuerzas al origen se obtuvo

$$\vec{\mathbf{R}} = 300 \hat{j} \text{ N} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{M}}_O = 600 \hat{i} + 900 \hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

- Justifica por qué el sistema no se puede reducir a una sola fuerza.
- Determina el paso del torsor y el momento del torsor.
- Determina el punto donde el eje de la llave corta el plano xz .

SOLUCIONARIO — Simulacro 1

Punto 1

Ruta de solución

Receta del Taller 0: vector $A \rightarrow B$, longitud, unitario, por la tensión. Después el momento con $\vec{r}_{O \rightarrow A}$, que es el más cómodo porque A es donde está aplicada la fuerza. Y el momento respecto al eje x es simplemente la componente $\hat{i}$ del momento.

PASO 1 La fuerza del cable

$$\vec{r}_{A \rightarrow B} = 6\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{A \rightarrow B}| = \sqrt{36 + 36 + 49} = \sqrt{121} = 11 \text{ m}$$

$$\vec{T} = \frac{1320}{11}(6\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}) = 120(6\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k})$$

$$\vec{T} = 720\hat{i} + 720\hat{j} - 840\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Ángulos directores

$$\cos \theta_x = \frac{720}{1320} = 0,5455 \quad \cos \theta_y = \frac{720}{1320} = 0,5455 \quad \cos \theta_z = \frac{-840}{1320} = -0,6364$$

$$\theta_x = 56,94^\circ \quad \theta_y = 56,94^\circ \quad \theta_z = 129,53^\circ$$

PASO 3 Momento respecto a O

Con $\vec{r}_{O \rightarrow A} = 9\hat{k}$, que tiene dos ceros:

$$M_x = (0)(-840) - (9)(720) = -6480$$

$$M_y = (9)(720) - (0)(-840) = 6480$$

$$M_z = (0)(720) - (0)(720) = 0$$

$$\vec{M}_O = -6480\hat{i} + 6480\hat{j} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad |\vec{M}_O| = 6480\sqrt{2} = 9164,15 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Momento respecto al eje x

$$M_x = \vec{M}_O \cdot \hat{i} = -6480 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $\vec{T} = 720\hat{i} + 720\hat{j} - 840\hat{k}$ N, con $\theta_x = \theta_y = 56,94^\circ$ y $\theta_z = 129,53^\circ$; $\vec{M}_O = -6480\hat{i} + 6480\hat{j}$ N·m; $M_x = -6480$ N·m. Que $M_z = 0$ dice que el cable no puede hacer girar la pluma alrededor de su propio eje vertical: la fuerza está aplicada sobre ese mismo eje.

Chequeo de sentido común

$$|\vec{T}| = \sqrt{720^2 + 720^2 + 840^2} = \sqrt{518\,400 + 518\,400 + 705\,600} = \sqrt{1\,742\,400} = 1320 \text{ N}. \quad \checkmark$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{T} = (-6480)(720) + (6480)(720) + (0)(-840) = 0. \quad \checkmark$$

Punto 2

Ruta de solución

Tres piezas: la fuerza, el unitario del eje DB y un vector de posición que vaya de un punto del eje a un punto de la línea de acción. Escojo D (está sobre el eje) y P (está sobre la fuerza). Después, producto cruz y proyección.

PASO 1 La fuerza

$$\vec{r}_{P \rightarrow Q} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{P \rightarrow Q}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7 \text{ m}$$

$$\vec{T} = \frac{490}{7}(2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}) = 140\hat{i} - 420\hat{j} + 210\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Unitario del eje

$$\vec{r}_{D \rightarrow B} = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{D \rightarrow B}| = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ m} \quad \hat{\lambda}_{DB} = 0,8\hat{i} + 0,6\hat{k}$$

PASO 3 Momento respecto a D

Con $\vec{r}_{D \rightarrow P} = (2 - 0)\hat{i} + (0 - 4)\hat{j} + (3 - 0)\hat{k} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$:

$$M_x = (-4)(210) - (3)(-420) = -840 + 1260 = 420$$

$$M_y = (3)(140) - (2)(210) = 420 - 420 = 0$$

$$M_z = (2)(-420) - (-4)(140) = -840 + 560 = -280$$

$$\vec{M}_D = 420\hat{i} - 280\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 Proyecta sobre el eje

$$M_{DB} = \vec{M}_D \cdot \hat{\lambda}_{DB} = (420)(0,8) + (0)(0) + (-280)(0,6) = 336 - 168$$

$$M_{DB} = 168 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $M_{DB} = 168 \text{ N} \cdot \text{m}$, positivo: el cable hace girar la barra alrededor del eje DB en el sentido de la mano derecha con el pulgar apuntando de D hacia B .

Chequeo de sentido común

Repita usando B en vez de D : $\vec{r}_{B \rightarrow P} = -2\hat{i} - 4\hat{j} + 0\hat{k}$, de donde $\vec{M}_B = (-4)(210) - 0 = -840$ en $\hat{i}$, $0 - (-2)(210) = 420$ en $\hat{j}$, $(-2)(-420) - (-4)(140) = 1400$ en $\hat{k}$; es decir $\vec{M}_B = (-840; 420; 1400)$. Proyectando: $(-840)(0,8) + (1400)(0,6) = -672 + 840 = 168 \text{ N} \cdot \text{m}$. ✓ Momentos distintos, misma proyección.

Punto 3

Ruta de solución

La prueba del producto punto decide. Como va a dar distinto de cero, aplico la receta: unitario, proyección, paso, momento del tórsor, momento perpendicular y ecuación del eje con $y = 0$.

PASO 1 La prueba

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (600)(0) + (900)(300) + (0)(0) = 270\,000 \neq 0$$

No es cero, así que **no** existe ninguna posición de $\vec{R}$ sola que reproduzca el sistema: hay torsor.

PASO 2 Paso y momento del torsor

$$|\vec{R}| = 300 \text{ N} \quad \hat{\lambda} = \hat{j} \quad M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{j} = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$p = \frac{900 \text{ N} \cdot \text{m}}{300 \text{ N}} = 3,00 \text{ m} \quad \vec{M}_{\text{torsor}} = 900 \hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 3 Momento perpendicular

$$\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}} = (600; 900; 0) - (0; 900; 0) = 600 \hat{i} \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 El eje, con $y = 0$

Con $\vec{r} = (x; 0; z)$:

$$(x; 0; z) \times (0; 300; 0) = (-300z; 0; 300x) = (600; 0; 0)$$

$$-300z = 600 \implies z = -2,00 \text{ m} \quad 300x = 0 \implies x = 0$$

Respuesta: (a) Porque $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 270\,000 \neq 0$. (b) $p = 3,00 \text{ m}$ y $\vec{M}_{\text{torsor}} = 900 \hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}$. (c) El eje corta el plano xz en $(0; 0; -2,00) \text{ m}$.

Chequeo de sentido común

$$\vec{M}_{\text{torsor}} + \vec{r} \times \vec{R} = 900 \hat{j} + (0; 0; -2) \times (0; 300; 0) = 900 \hat{j} + 600 \hat{i}, \text{ que es exactamente } \vec{M}_O. \checkmark$$

Respuestas rápidas — Simulacro 1

- | | |
|----------|---|
| 1 | $\vec{T} = 720\hat{i} + 720\hat{j} - 840\hat{k} \text{ N}; \quad \theta_x = \theta_y = 56,94^\circ, \theta_z = 129,53^\circ; \quad \vec{M}_O = -6480\hat{i} + 6480\hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}; \quad M_x = -6480 \text{ N} \cdot \text{m}$ |
| 2 | $\vec{T} = 140\hat{i} - 420\hat{j} + 210\hat{k} \text{ N}; \quad \vec{M}_D = 420\hat{i} - 280\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}; \quad M_{DB} = 168 \text{ N} \cdot \text{m}$ |
| 3 | Hay torsor; $p = 3,00 \text{ m}; \quad \vec{M}_{\text{torsor}} = 900 \hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}; \quad \text{el eje corta el plano } xz \text{ en } (0; 0; -2,00) \text{ m}$ |