

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá
 Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
 Principios de Estática 2016640

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 2

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

Duración: 100 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

Cómo hacer este simulacro

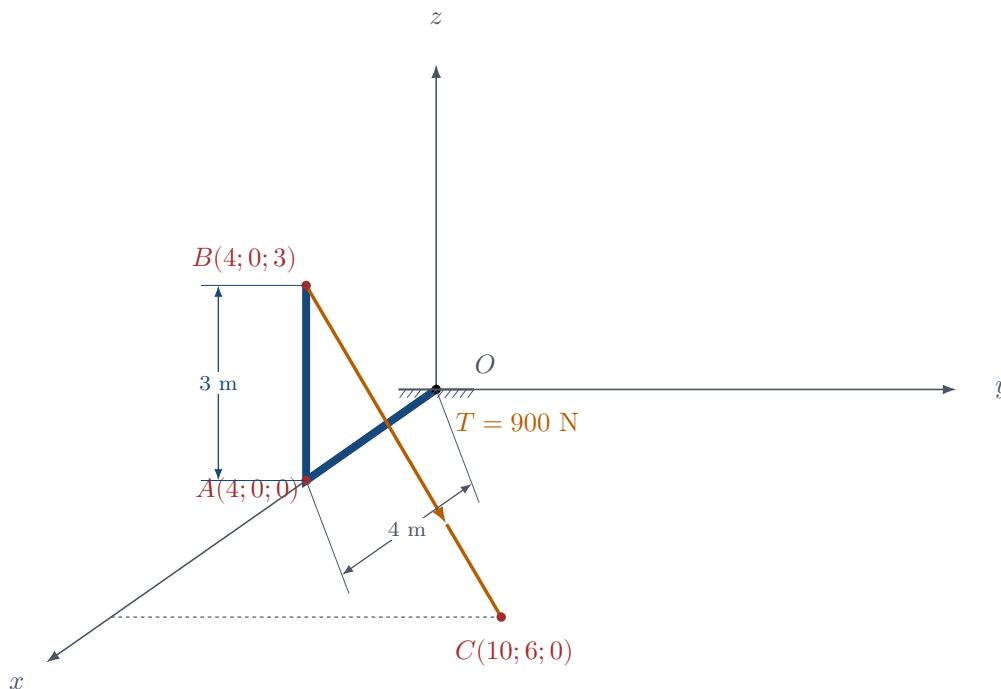
Cronómetro en 100 minutos, sin apuntes y sin parar. Este simulacro sube un escalón respecto al 1: el punto 2 tiene el eje *oblicuo* (no coincide con ningún eje coordenado) y el punto 3 te obliga a construir tú mismo la reducción antes de aplicar la receta del torsor.

Si te quedas trabado más de 10 minutos en un punto, pasa al siguiente y vuelve. En el parcial real esa decisión vale más que cualquier fórmula.

PUNTO 1 Tubo acodado con cable (20 puntos)

El tubo OAB sale del empotramiento O a lo largo del eje x hasta $A(4; 0; 0)$ m y luego sube hasta $B(4; 0; 3)$ m. En B se ata un cable que llega al anclaje $C(10; 6; 0)$ m con una tensión de 900 N.

- Escribe la fuerza del cable como vector y determina sus ángulos directores.
- Determina el momento respecto a O .
- Determina el momento respecto al eje OA .

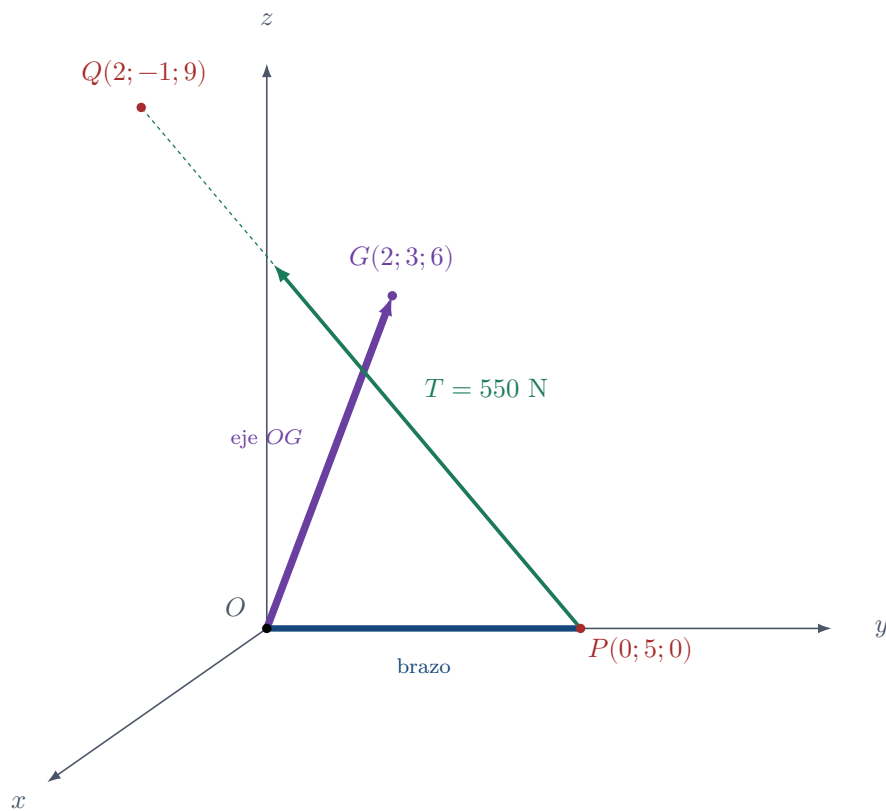


PUNTO 2 Momento respecto a un eje oblicuo (20 puntos)

Una flecha rígida OG gira alrededor de su propio eje; G está en $(2; 3; 6)$ m. A la flecha se le soldó

un brazo que llega hasta $P(0; 5; 0)$ m, y en P se ata un cable que va hacia $Q(2; -1; 9)$ m con una tensión de 550 N.

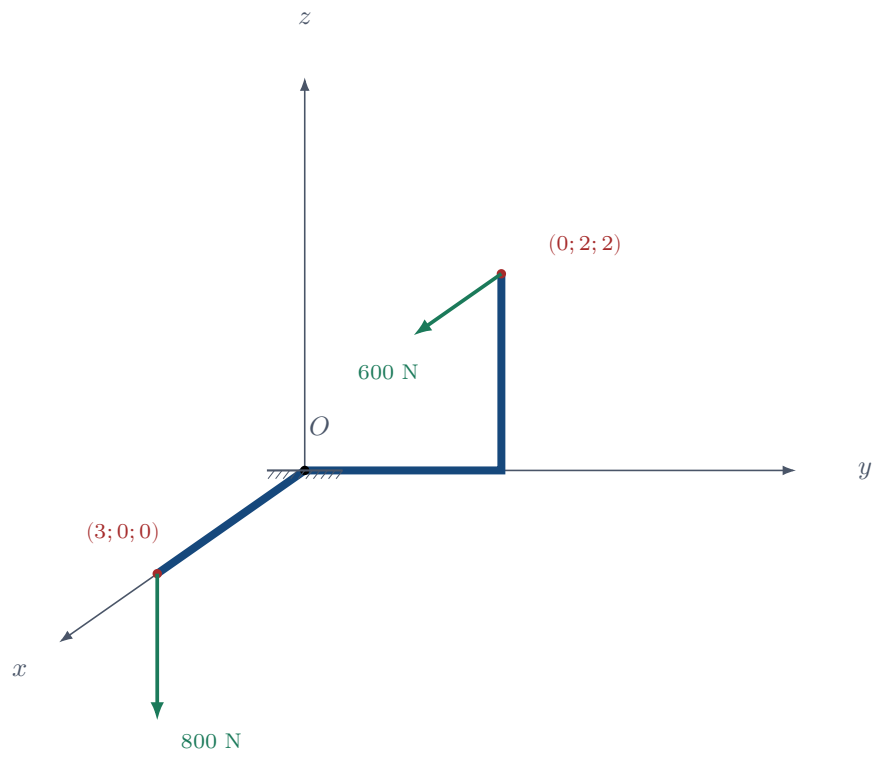
Determina el momento de esa tensión respecto al eje OG .



PUNTO 3 Llave de torsión (20 puntos)

Sobre la estructura en L actúan dos fuerzas: una de 800 N hacia abajo aplicada en el extremo del brazo horizontal, en $(3; 0; 0)$ m, y otra de 600 N en la dirección $+x$ aplicada en el tope del montante, en $(0; 2; 2)$ m.

- Reduce el sistema a una fuerza y un par en O y comprueba que hay torsor.
- Determina el paso y el momento del torsor.
- Determina dónde el eje de la llave corta el plano xy .



SOLUCIONARIO — Simulacro 2

Punto 1

PASO 1 La fuerza del cable

$$\vec{r}_{B \rightarrow C} = 6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{B \rightarrow C}| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9 \text{ m}$$

$$\vec{T} = \frac{900}{9}(6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}) = 100(6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$\vec{T} = 600\hat{i} + 600\hat{j} - 300\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Ángulos directores

$$\cos \theta_x = \cos \theta_y = \frac{600}{900} = 0,6667 \quad \cos \theta_z = \frac{-300}{900} = -0,3333$$

$$\theta_x = \theta_y = 48,19^\circ \quad \theta_z = 109,47^\circ$$

PASO 3 Momento respecto a O

Con $\vec{r}_{O \rightarrow B} = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$:

$$M_x = (0)(-300) - (3)(600) = -1800$$

$$M_y = (3)(600) - (4)(-300) = 1800 + 1200 = 3000$$

$$M_z = (4)(600) - (0)(600) = 2400$$

$$\vec{M}_O = -1800\hat{i} + 3000\hat{j} + 2400\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$|\vec{M}_O| = 4242,64 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Momento respecto al eje OA

El eje OA va a lo largo de x , así que $\hat{\lambda}_{OA} = \hat{i}$:

$$M_{OA} = \vec{M}_O \cdot \hat{i} = -1800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $\vec{T} = 600\hat{i} + 600\hat{j} - 300\hat{k} \text{ N}$, con $\theta_x = \theta_y = 48,19^\circ$ y $\theta_z = 109,47^\circ$; $\vec{M}_O = -1800\hat{i} + 3000\hat{j} + 2400\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ (4242,64 N · m); $M_{OA} = -1800 \text{ N} \cdot \text{m}$.

El atajo

Para la parte (c) bastaba con $\vec{r}_{A \rightarrow B} = 3\hat{k}$, porque A también está sobre el eje: $\vec{M}_A = 3\hat{k} \times (600; 600; -300) = (-1800; 1800; 0)$, y su componente $\hat{i}$ es $-1800 \text{ N} \cdot \text{m}$. Dos multiplicaciones en vez de nueve.

Chequeo de sentido común

$$|\vec{T}| = \sqrt{600^2 + 600^2 + 300^2} = \sqrt{810\,000} = 900 \text{ N} \quad \checkmark \quad \text{y} \quad \vec{M}_O \cdot \vec{T} = (-1800)(600) + (3000)(600) + (2400)(-300) = -1\,080\,000 + 1\,800\,000 - 720\,000 = 0 \quad \checkmark$$

Punto 2

PASO 1 Unitario del eje

$$\vec{r}_{O \rightarrow G} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{O \rightarrow G}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \text{ m} \quad \hat{\lambda}_{OG} = \frac{1}{7}(2; 3; 6)$$

PASO 2 La fuerza

$$\vec{r}_{P \rightarrow Q} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{P \rightarrow Q}| = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11 \text{ m}$$

$$\vec{T} = \frac{550}{11}(2\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k}) = 100\hat{i} - 300\hat{j} + 450\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 3 Momento respecto a O

Con $\vec{r}_{O \rightarrow P} = 5\hat{j}$, que tiene dos ceros:

$$M_x = (5)(450) - (0)(-300) = 2250$$

$$M_y = (0)(100) - (0)(450) = 0$$

$$M_z = (0)(-300) - (5)(100) = -500$$

$$\vec{M}_O = 2250\hat{i} - 500\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad |\vec{M}_O| = 2304,89 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Proyecta sobre el eje

$$M_{OG} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda}_{OG} = \frac{(2250)(2) + (0)(3) + (-500)(6)}{7} = \frac{4500 - 3000}{7} = \frac{1500}{7}$$

$$M_{OG} = 214,29 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $M_{OG} = 214,29 \text{ N} \cdot \text{m}$, positivo: la flecha gira en el sentido de la mano derecha con el pulgar de O hacia G.

Chequeo de sentido común

$|M_{OG}| = 214,29 \leq |\vec{M}_O| = 2304,89$. ✓ Una proyección nunca supera al vector proyectado. Aquí se proyecta muy poco: casi todo el momento ($2304,89 \text{ N} \cdot \text{m}$) flexiona la flecha, y solo $214,29 \text{ N} \cdot \text{m}$ la hacen girar. Eso pasa porque $\vec{M}_O$ y el eje OG están casi perpendiculares entre sí.

Punto 3

PASO 1 Reducción al origen

$$\vec{R} = (0; 0; -800) + (600; 0; 0) = 600\hat{i} - 800\hat{k} \text{ N} \quad |\vec{R}| = \sqrt{360\,000 + 640\,000} = 1000 \text{ N}$$

$$\vec{M}_O = (3; 0; 0) \times (0; 0; -800) + (0; 2; 2) \times (600; 0; 0)$$

Primer producto: $M_x = 0$, $M_y = (0)(0) - (3)(-800) = 2400$, $M_z = 0$.

Segundo: $M_x = (2)(0) - (2)(0) = 0$, $M_y = (2)(600) - (0)(0) = 1200$, $M_z = (0)(0) - (2)(600) = -1200$.

$$\vec{M}_O = 3600\hat{j} - 1200\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 2 La prueba

$$\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = (0)(600) + (3600)(0) + (-1200)(-800) = 960\,000 \neq 0$$

Hay torsor.

PASO 3 Paso y momento del torsor

$$\hat{\lambda} = \frac{(600; 0; -800)}{1000} = (0,6; 0; -0,8)$$

$$M_{\parallel} = \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \hat{\lambda} = (0)(0,6) + (3600)(0) + (-1200)(-0,8) = 960 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$p = \frac{960}{1000} = 0,96 \text{ m} \quad \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 960 (0,6; 0; -0,8) = (576; 0; -768) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Momento perpendicular y eje

$$\vec{\mathbf{M}}_{\perp} = (0 - 576; 3600 - 0; -1200 + 768) = (-576; 3600; -432) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Con $\vec{\mathbf{r}} = (x; y; 0)$:

$$(x; y; 0) \times (600; 0; -800) = (-800y; 800x; -600y)$$

$$-800y = -576 \Rightarrow y = 0,72 \text{ m} \quad 800x = 3600 \Rightarrow x = 4,50 \text{ m}$$

$$(\text{control}) \quad -600(0,72) = -432 \checkmark$$

Respuesta: $\vec{\mathbf{R}} = 600\hat{i} - 800\hat{k}$ N (1000 N) y $\vec{\mathbf{M}}_O = 3600\hat{j} - 1200\hat{k}$ N·m; hay torsor con paso $p = 0,96$ m y $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 576\hat{i} - 768\hat{k}$ N·m. El eje de la llave corta el plano xy en $(4,50; 0,72; 0)$ m.

Chequeo de sentido común

$$\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = (576; 0; -768) + (-576; 3600; -432) = (0; 3600; -1200) = \vec{\mathbf{M}}_O. \checkmark$$

$$\text{Y } \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = p \vec{\mathbf{R}}: 0,96 \times (600; 0; -800) = (576; 0; -768). \checkmark$$

Respuestas rápidas — Simulacro 2

$$1 \quad \vec{\mathbf{T}} = 600\hat{i} + 600\hat{j} - 300\hat{k} \text{ N}; \quad \theta_x = \theta_y = 48,19^\circ, \theta_z = 109,47^\circ; \quad \vec{\mathbf{M}}_O = -1800\hat{i} + 3000\hat{j} + 2400\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (4242,64 \text{ N} \cdot \text{m}); \quad M_{OA} = -1800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$2 \quad \vec{\mathbf{T}} = 100\hat{i} - 300\hat{j} + 450\hat{k} \text{ N}; \quad \vec{\mathbf{M}}_O = 2250\hat{i} - 500\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}; \quad M_{OG} = 214,29 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$3 \quad \vec{\mathbf{R}} = 600\hat{i} - 800\hat{k} \text{ N}; \quad \vec{\mathbf{M}}_O = 3600\hat{j} - 1200\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}; \quad p = 0,96 \text{ m}; \quad \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 576\hat{i} - 768\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}; \quad \text{eje por } (4,50; 0,72; 0) \text{ m}$$