

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá
 Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
 Principios de Estática 2016640

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 3

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

Duración: 100 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

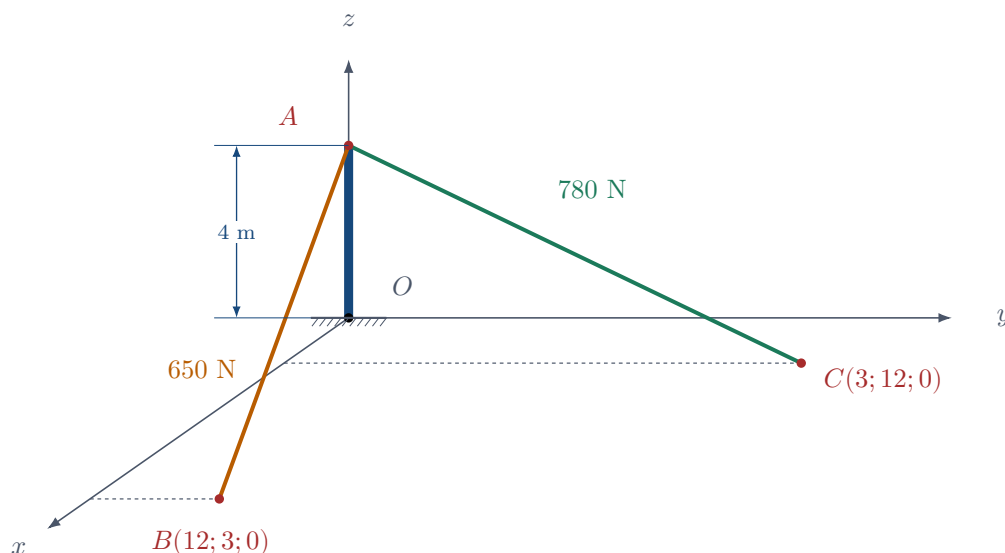
Cómo hacer este simulacro

Cronómetro en 100 minutos, sin apuntes. Este simulacro es **más duro que el parcial real**: el punto 1 pide combinar dos cables en una resultante antes de tomar momentos, y el punto 3 mete un par aplicado en medio del torsiador, que es donde más gente pierde el punto. Si lo sacas completo en el tiempo, el parcial no te va a sorprender.

PUNTO 1 Mástil con dos tensores (20 puntos)

El mástil OA mide 4 m y está tensado por dos cables que salen de $A(0; 0; 4)$ m hacia los anclajes $B(12; 3; 0)$ m y $C(3; 12; 0)$ m. Las tensiones valen 650 N y 780 N respectivamente.

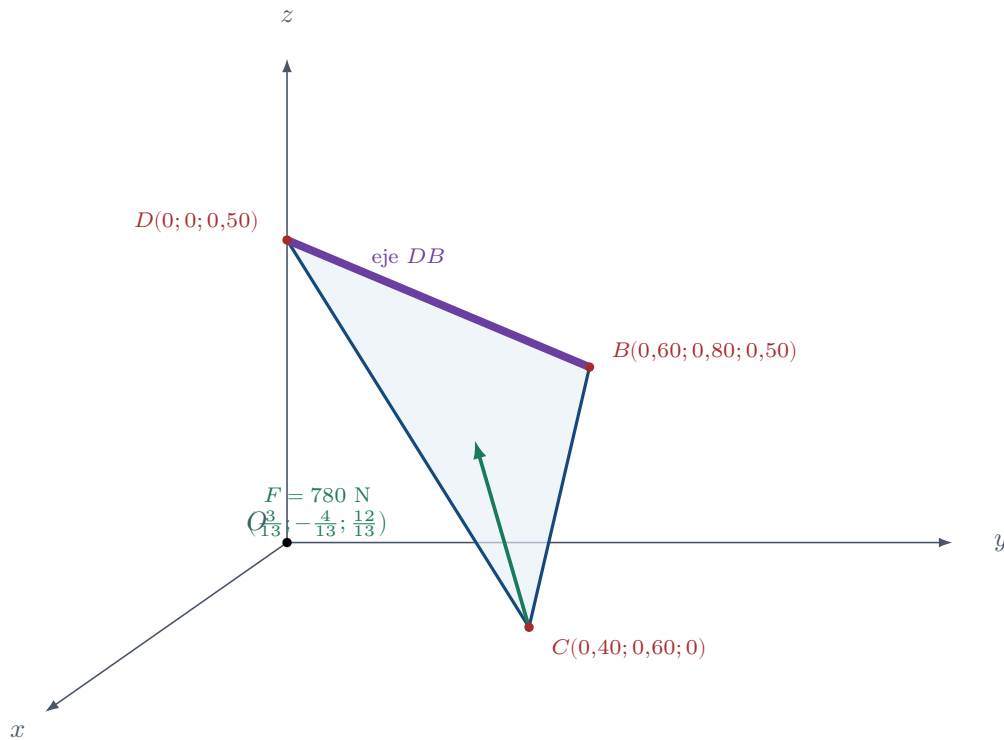
- Escribe las dos fuerzas como vectores.
- Determina la resultante que los cables ejercen sobre A , su magnitud y sus ángulos directores.
- Determina el momento que esa resultante produce respecto a la base O .



PUNTO 2 Momento respecto a una línea (20 puntos)

La placa DBC está articulada a lo largo de la línea DB . Los tres vértices son $D(0; 0; 0,50)$ m, $B(0,60; 0,80; 0,50)$ m y $C(0,40; 0,60; 0)$ m. En el vértice C actúa una fuerza de 780 N cuyos cosenos directores valen $\frac{3}{13}$, $-\frac{4}{13}$ y $\frac{12}{13}$.

Determina el momento de esa fuerza respecto a la línea DB e interpreta el signo.

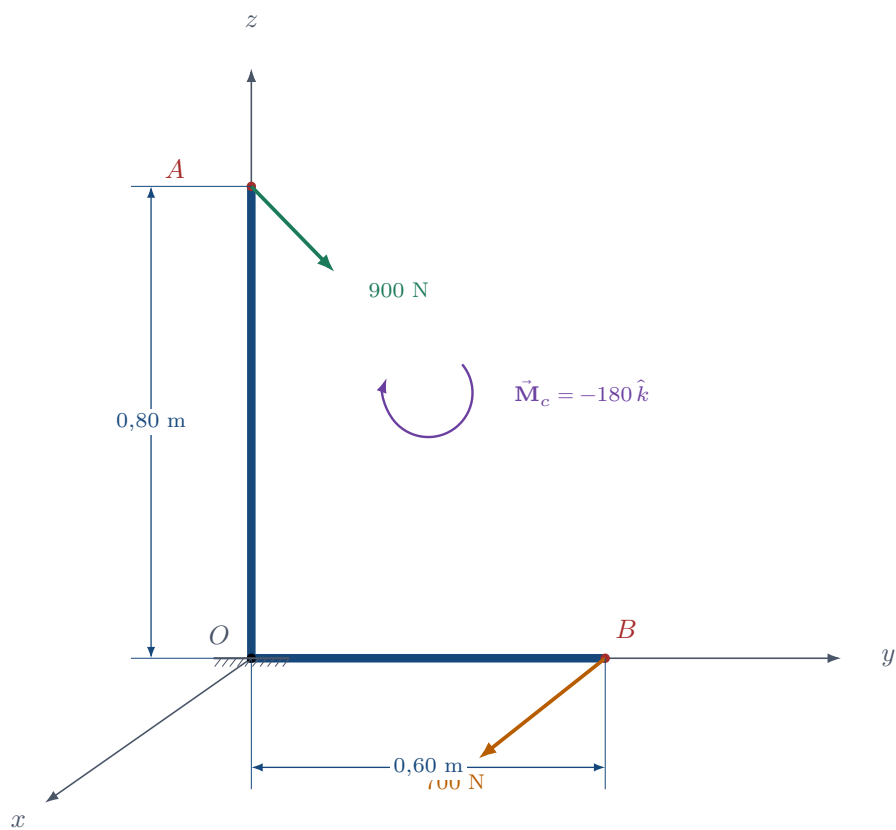


PUNTO 3 Llave de torsión con un par aplicado (20 puntos)

Sobre el soporte en L actúan:

- una fuerza de 900 N en $A(0; 0; 0,80)$ m, con cosenos directores $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$;
- una fuerza de 700 N en $B(0; 0,60; 0)$ m, con cosenos directores $(\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{2}{7})$;
- un par $\vec{M}_c = -180 \hat{k} \text{ N}\cdot\text{m}$.

Reduce el sistema a una llave de torsión, indica su paso y determina dónde el eje corta el plano xy .



SOLUCIONARIO — Simulacro 3

Punto 1

PASO 1 Las dos fuerzas

$$\vec{r}_{A \rightarrow B} = 12\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k} \text{ m}, \quad |\vec{r}_{A \rightarrow B}| = \sqrt{144 + 9 + 16} = 13 \text{ m}$$

$$\vec{T}_1 = \frac{650}{13}(12; 3; -4) = 50(12; 3; -4) = 600\hat{i} + 150\hat{j} - 200\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{r}_{A \rightarrow C} = 3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k} \text{ m}, \quad |\vec{r}_{A \rightarrow C}| = \sqrt{9 + 144 + 16} = 13 \text{ m}$$

$$\vec{T}_2 = \frac{780}{13}(3; 12; -4) = 60(3; 12; -4) = 180\hat{i} + 720\hat{j} - 240\hat{k} \text{ N}$$

PASO 2 Resultante

$$\vec{R} = 780\hat{i} + 870\hat{j} - 440\hat{k} \quad [\text{N}]$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{608\,400 + 756\,900 + 193\,600} = \sqrt{1\,558\,900} = 1248,56 \text{ N}$$

PASO 3 Ángulos directores de la resultante

$$\cos \theta_x = \frac{780}{1248,56} = 0,6247 \quad \cos \theta_y = \frac{870}{1248,56} = 0,6968 \quad \cos \theta_z = \frac{-440}{1248,56} = -0,3524$$

$$\theta_x = 51,34^\circ \quad \theta_y = 45,83^\circ \quad \theta_z = 110,63^\circ$$

PASO 4 Momento respecto a O

Con $\vec{r}_{O \rightarrow A} = 4\hat{k}$:

$$M_x = (0)(-440) - (4)(870) = -3480$$

$$M_y = (4)(780) - (0)(-440) = 3120$$

$$M_z = (0)(870) - (0)(780) = 0$$

$$\vec{M}_O = -3480\hat{i} + 3120\hat{j} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$|\vec{M}_O| = 4673,84 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $\vec{T}_1 = 600\hat{i} + 150\hat{j} - 200\hat{k} \text{ N}$; $\vec{T}_2 = 180\hat{i} + 720\hat{j} - 240\hat{k} \text{ N}$; $\vec{R} = 780\hat{i} + 870\hat{j} - 440\hat{k} \text{ N}$ (1248,56 N) con $\theta_x = 51,34^\circ$, $\theta_y = 45,83^\circ$, $\theta_z = 110,63^\circ$; y $\vec{M}_O = -3480\hat{i} + 3120\hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}$. La componente M_z vale cero porque las dos fuerzas se aplican en A, que está sobre el propio eje del mástil.

Chequeo de sentido común

$|\vec{R}| = 1248,56 \text{ N}$ tiene que ser menor que $650 + 780 = 1430 \text{ N}$. ✓ $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-3480)(780) + (3120)(870) + (0)(-440) = -2\,714\,400 + 2\,714\,400 = 0$. ✓

Punto 2

PASO 1 La fuerza

$$\vec{F} = 780 \left(\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{12}{13} \right) = 60 (3; -4; 12) = 180\hat{i} - 240\hat{j} + 720\hat{k} \text{ N}$$

PASO 2 Unitario del eje

$$\vec{r}_{D \rightarrow B} = 0,60\hat{i} + 0,80\hat{j} + 0\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{D \rightarrow B}| = \sqrt{0,36 + 0,64} = 1,00 \text{ m}$$

$$\hat{\lambda}_{DB} = 0,60\hat{i} + 0,80\hat{j}$$

PASO 3 Momento respecto a D

Con $\vec{r}_{D \rightarrow C} = 0,40\hat{i} + 0,60\hat{j} - 0,50\hat{k}$:

$$M_x = (0,60)(720) - (-0,50)(-240) = 432 - 120 = 312$$

$$M_y = (-0,50)(180) - (0,40)(720) = -90 - 288 = -378$$

$$M_z = (0,40)(-240) - (0,60)(180) = -96 - 108 = -204$$

$$\vec{M}_D = 312\hat{i} - 378\hat{j} - 204\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 Proyecta

$$M_{DB} = (312)(0,60) + (-378)(0,80) + (-204)(0) = 187,2 - 302,4$$

$$M_{DB} = -115,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $M_{DB} = -115,2 \text{ N} \cdot \text{m}$. El signo negativo dice que la fuerza hace girar la placa alrededor de la articulación DB en sentido *contrario* al de la mano derecha con el pulgar apuntando de D hacia B. En magnitud, la placa tiende a abrirse con $115,2 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Chequeo de sentido común

$$|\vec{F}| = \sqrt{180^2 + 240^2 + 720^2} = \sqrt{32\,400 + 57\,600 + 518\,400} = \sqrt{608\,400} = 780 \text{ N}. \quad \checkmark$$

$$\vec{M}_D \cdot \vec{F} = (312)(180) + (-378)(-240) + (-204)(720) = 56\,160 + 90\,720 - 146\,880 = 0. \quad \checkmark$$

Punto 3

PASO 1 Las fuerzas

$$\vec{F}_1 = 900 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) = 300\hat{i} + 600\hat{j} - 600\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = 700 \left(\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{2}{7} \right) = 600\hat{i} - 300\hat{j} + 200\hat{k} \text{ N}$$

PASO 2 Resultante

$$\vec{R} = 900\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k} \quad [\text{N}]$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{810\,000 + 90\,000 + 160\,000} = 1029,56 \text{ N}$$

PASO 3 Momento respecto a O (¡con el par!)

Con $\vec{r}_{O \rightarrow A} = 0,80 \hat{k}$ y $\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0,60 \hat{j}$:

$$0,80 \hat{k} \times \vec{F}_1 = ((0)(-600) - (0,8)(600); (0,8)(300) - 0; 0) = (-480; 240; 0)$$

$$0,60 \hat{j} \times \vec{F}_2 = ((0,6)(200) - 0; 0 - 0; 0 - (0,6)(600)) = (120; 0; -360)$$

$$\vec{M}_O = (-480; 240; 0) + (120; 0; -360) + (0; 0; -180)$$

$$\vec{M}_O = -360 \hat{i} + 240 \hat{j} - 540 \hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 La prueba

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-360)(900) + (240)(300) + (-540)(-400) = -324\,000 + 72\,000 + 216\,000 = -36\,000 \neq 0$$

Hay torsor.

PASO 5 Paso y momento del torsor

$$\hat{\lambda} = \frac{(900; 300; -400)}{1029,56} = (0,8742; 0,2914; -0,3885)$$

$$M_{\parallel} = \frac{-36\,000}{1029,56} = -34,97 \text{ N} \cdot \text{m} \quad p = \frac{-34,97}{1029,56} = -0,0340 \text{ m}$$

$$\vec{M}_{\text{torsor}} = -34,97 (0,8742; 0,2914; -0,3885) = (-30,57; -10,19; 13,58) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 6 Momento perpendicular y eje

$$\vec{M}_{\perp} = (-360 + 30,57; 240 + 10,19; -540 - 13,58) = (-329,43; 250,19; -553,58) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Con $\vec{r} = (x; y; 0)$:

$$(x; y; 0) \times (900; 300; -400) = (-400y; 400x; 300x - 900y)$$

$$-400y = -329,43 \Rightarrow y = 0,8236 \text{ m} \quad 400x = 250,19 \Rightarrow x = 0,6255 \text{ m}$$

$$(\text{control}) \quad 300(0,6255) - 900(0,8236) = 187,6 - 741,2 = -553,6 \checkmark$$

Respuesta: Hay torsor: $\vec{R} = 900\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k}$ N (1029,56 N), $\vec{M}_{\text{torsor}} = -30,57\hat{i} - 10,19\hat{j} + 13,58\hat{k}$ N·m y paso $p = -0,0340$ m. El eje corta el plano xy en $(0,6255; 0,8236; 0)$ m. El paso negativo (y muy pequeño) dice que el sistema es casi una fuerza pura: apenas 35 N·m de los 700 N·m de momento total son imposibles de eliminar.

Si olvidas el par de $-180\hat{k}$

$\vec{M}_O$ te daría $(-360; 240; -360)$, el producto punto daría $-108\,000$ en vez de $-36\,000$, y el paso te saldría $-0,1019$ m en vez de $-0,0340$ m: **tres veces** el valor correcto. Y el punto del eje se corre por completo. Ese es el precio de olvidar una línea.

Chequeo de sentido común

$$\vec{M}_{\text{torsor}} + \vec{r} \times \vec{R} = (-30,57; -10,19; 13,58) + (-329,43; 250,19; -553,58) = (-360,0; 240,0; -540,0) = \vec{M}_O. \checkmark$$

Respuestas rápidas — Simulacro 3

- 1 $\vec{T}_1 = 600\hat{i} + 150\hat{j} - 200\hat{k}$ N; $\vec{T}_2 = 180\hat{i} + 720\hat{j} - 240\hat{k}$ N; $\vec{R} = 780\hat{i} + 870\hat{j} - 440\hat{k}$ N (1248,56 N); $\theta_x = 51,34^\circ$, $\theta_y = 45,83^\circ$, $\theta_z = 110,63^\circ$; $\vec{M}_O = -3480\hat{i} + 3120\hat{j}$ N·m
- 2 $\vec{F} = 180\hat{i} - 240\hat{j} + 720\hat{k}$ N; $\vec{M}_D = 312\hat{i} - 378\hat{j} - 204\hat{k}$ N·m; $M_{DB} = -115,2$ N · m
- 3 $\vec{R} = 900\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k}$ N; $\vec{M}_O = -360\hat{i} + 240\hat{j} - 540\hat{k}$ N·m; $p = -0,0340$ m; $\vec{M}_{\text{torsor}} = -30,57\hat{i} - 10,19\hat{j} + 13,58\hat{k}$ N·m; eje por (0,6255; 0,8236; 0) m