

Universidad Nacional de Colombia — Sede Bogotá
Facultad de Ingeniería — Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
Principios de Estática 2016640

SIMULACRO DE PARCIAL 1 — N.º 4

Nombre: _____ Código: _____ Nota: _____

Duración: 100 minutos • Tres puntos de igual valor • Escribe unidades en todo resultado.

Cómo hacer este simulacro

Este es el más duro de los cuatro y está deliberadamente por encima del parcial real. Tres trampas montadas a propósito:

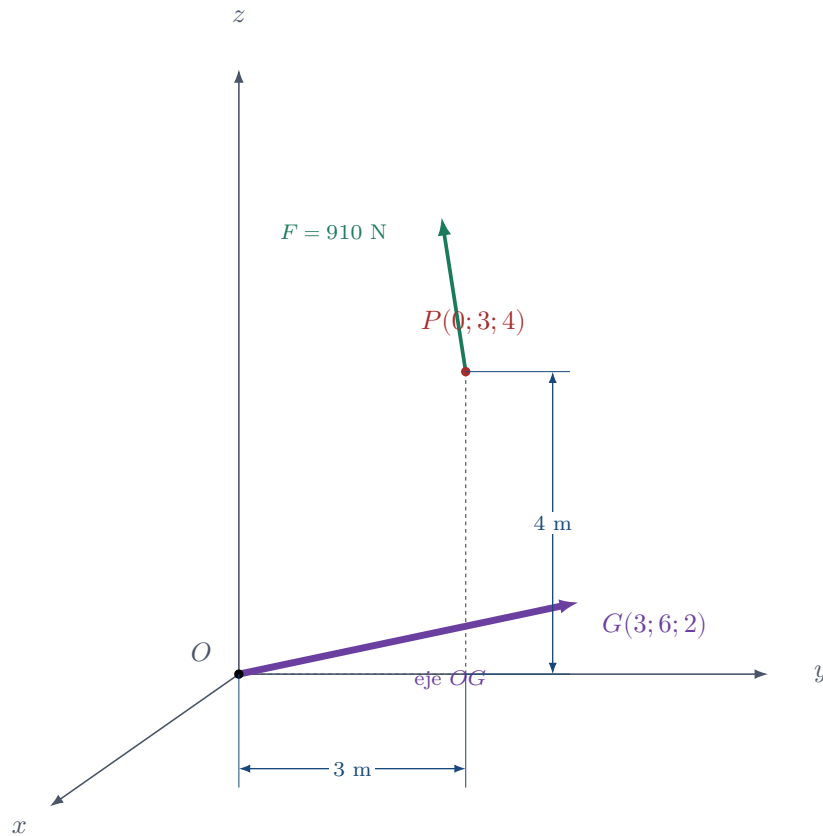
1. El punto 1 te da dos ángulos directores y te obliga a decidir el signo del tercero.
2. El punto 2 *sí* se reduce a una sola fuerza, pero solo lo sabes si haces la prueba del producto punto. Si arrancas con la receta del torsor, pierdes diez minutos.
3. El punto 3 tiene **tres** fuerzas: más aritmética y más oportunidades de equivocarse de signo.

Cronómetro en 100 minutos. Si lo sacas, estás listo.

PUNTO 1 Fuerza por ángulos directores (20 puntos)

Una fuerza de 910 N está aplicada en el punto $P(0; 3; 4)$ m. Forma 62° con el eje x y 48° con el eje z , y su ángulo con el eje y es **obtuso**.

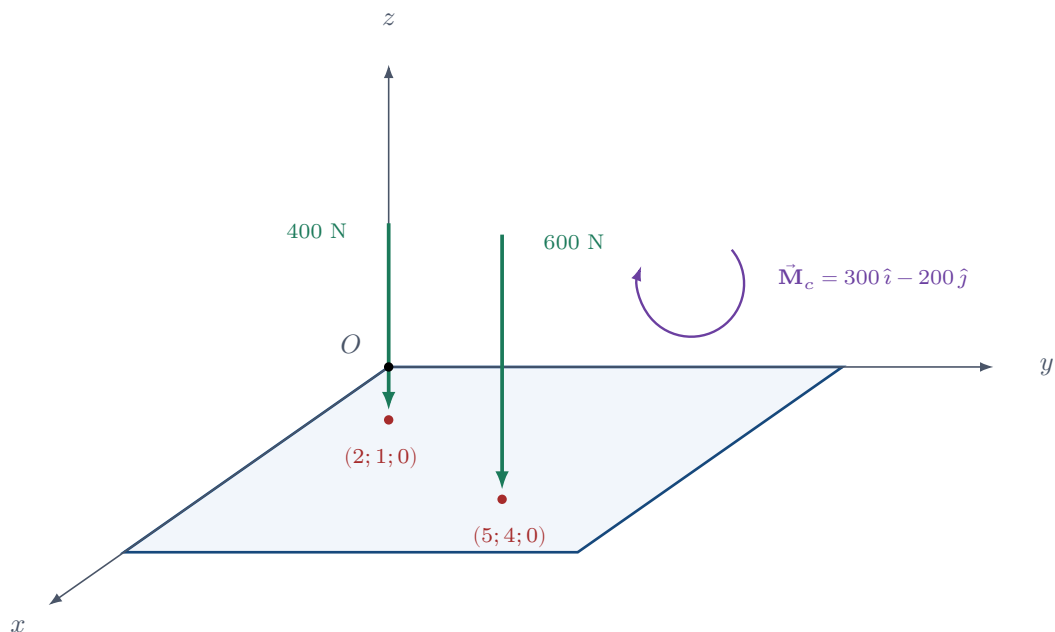
- (a) Determina θ_y y escribe la fuerza en componentes.
- (b) Determina el momento respecto al origen.
- (c) Determina el momento respecto a la línea OG , con $G(3; 6; 2)$ m.



PUNTO 2 ¿Fuerza única o torsor? (20 puntos)

Sobre una plataforma horizontal actúan dos cargas verticales hacia abajo — 400 N en $(2; 1; 0) \text{ m}$ y 600 N en $(5; 4; 0) \text{ m}$ — y además un par aplicado $\vec{M}_c = 300\hat{i} - 200\hat{j} \text{ N}\cdot\text{m}$.

- Reduce el sistema a una fuerza y un par en el origen.
- Decide, con la prueba del producto punto, si el sistema se reduce a una sola fuerza.
- Si se puede, determina por qué punto del plano xy pasa esa fuerza única.

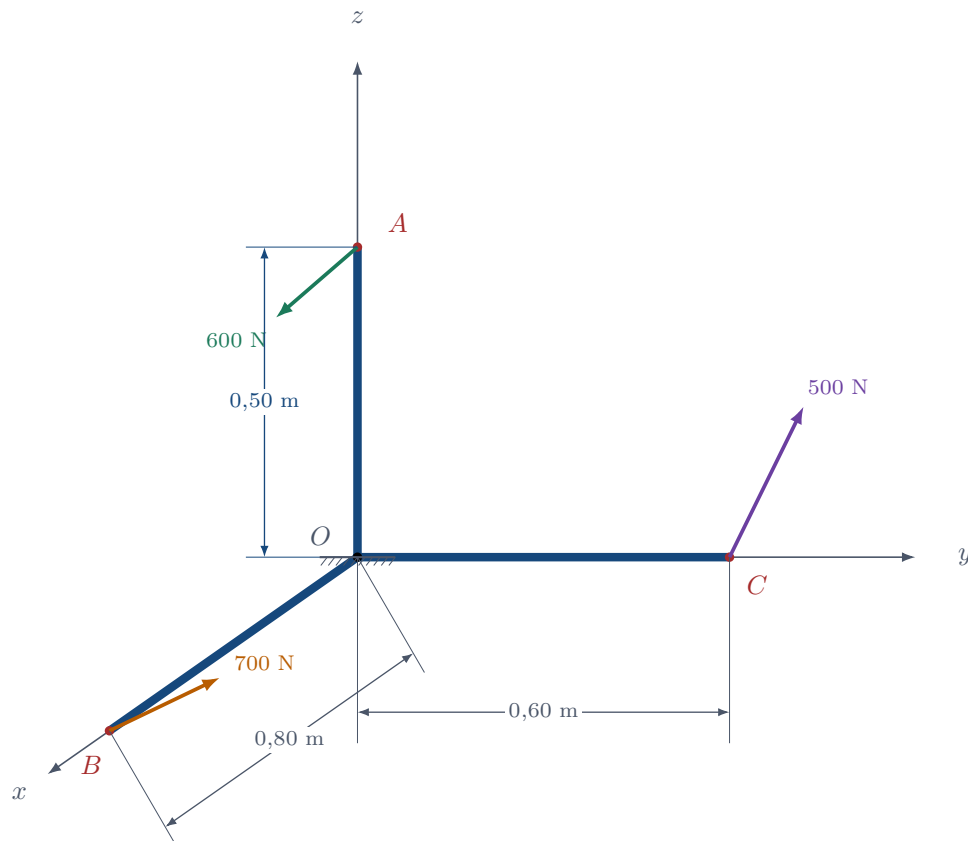


PUNTO 3 Llave de torsión con tres fuerzas (20 puntos)

Sobre el soporte de tres brazos actúan:

- 600 N en $A(0; 0; 0,50)$ m, con cosenos directores $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$;
- 700 N en $B(0,80; 0; 0)$ m, con cosenos directores $(\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7})$;
- 500 N en $C(0; 0,60; 0)$ m, con cosenos directores $(-\frac{4}{5}; 0; \frac{3}{5})$.

Reduce el sistema a una llave de torsión, indica su paso y determina el punto donde el eje interseca el plano xz .



SOLUCIONARIO — Simulacro 4

Punto 1

PASO 1 Determina θ_y

$$\cos^2 \theta_y = 1 - \cos^2 62^\circ - \cos^2 48^\circ = 1 - 0,2204 - 0,4477 = 0,3318$$

$$\cos \theta_y = \pm 0,5760 \quad \Rightarrow \quad \theta_y = 54,83^\circ \text{ o } 125,17^\circ$$

El enunciado dice **obtuso**, así que $\theta_y = 125,17^\circ$ y $\cos \theta_y = -0,5760$.

PASO 2 La fuerza en componentes

$$\vec{F} = 910 (0,4695; -0,5760; 0,6691)$$

$$\vec{F} = 427,22 \hat{i} - 524,23 \hat{j} + 608,91 \hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 3 Momento respecto a O

Con $\vec{r}_{O \rightarrow P} = 0 \hat{i} + 3 \hat{j} + 4 \hat{k}$:

$$M_x = (3)(608,91) - (4)(-524,23) = 1826,73 + 2096,91 = 3923,63$$

$$M_y = (4)(427,22) - (0)(608,91) = 1708,88$$

$$M_z = (0)(-524,23) - (3)(427,22) = -1281,66$$

$$\vec{M}_O = 3923,63 \hat{i} + 1708,88 \hat{j} - 1281,66 \hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$|\vec{M}_O| = 4467,42 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Momento respecto a la línea OG

$$|\vec{r}_{O \rightarrow G}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7 \text{ m} \quad \hat{\lambda}_{OG} = \frac{1}{7}(3; 6; 2)$$

$$M_{OG} = \frac{(3923,63)(3) + (1708,88)(6) + (-1281,66)(2)}{7}$$

$$= \frac{11\,770,89 + 10\,253,28 - 2\,563,32}{7} = \frac{19\,460,85}{7}$$

$$M_{OG} = 2780,12 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $\theta_y = 125,17^\circ$; $\vec{F} = 427,22\hat{i} - 524,23\hat{j} + 608,91\hat{k} \text{ N}$; $\vec{M}_O = 3923,63\hat{i} + 1708,88\hat{j} - 1281,66\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ ($4467,42 \text{ N} \cdot \text{m}$); $M_{OG} = 2780,12 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Escoger mal la raíz cambia todo

Con $\theta_y = 54,83^\circ$ la componente F_y sería $+524,23 \text{ N}$ en vez de $-524,23 \text{ N}$, y M_x pasaría de $+3923,63$ a $-270,2 \text{ N} \cdot \text{m}$: un cambio de más del 90%. El enunciado *siempre* te da el dato que resuelve la ambigüedad (“obtuso”, “ $F_y < 0$ ”, o la figura). Búscalo antes de escribir el vector.

Chequeo de sentido común

$$|\vec{F}| = \sqrt{427,22^2 + 524,23^2 + 608,91^2} = \sqrt{182\,517 + 274\,817 + 370\,771} = \sqrt{828\,105} = 910,0 \text{ N}.$$

✓

$$\vec{M}_O \cdot \vec{F} \approx 0 \text{ (perpendicularidad)}. \quad \checkmark$$

Punto 2

PASO 1 Reducción al origen

$$\vec{\mathbf{R}} = (0; 0; -400) + (0; 0; -600) = -1000 \hat{k} \text{ N}$$

Momentos de las dos fuerzas:

$$(2; 1; 0) \times (0; 0; -400) = ((1)(-400); -(2)(-400); 0) = (-400; 800; 0)$$

$$(5; 4; 0) \times (0; 0; -600) = ((4)(-600); -(5)(-600); 0) = (-2400; 3000; 0)$$

Y el par, que entra tal cual:

$$\vec{\mathbf{M}}_O = (-400; 800; 0) + (-2400; 3000; 0) + (300; -200; 0)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O = -2500 \hat{i} + 3600 \hat{j} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 2 La prueba del producto punto

$$\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = (-2500)(0) + (3600)(0) + (0)(-1000) = 0$$

Da cero: el sistema *sí* se reduce a una sola fuerza. No hay tórsor y no hay que calcular ningún paso.

PASO 3 Por dónde pasa

Busco $\vec{\mathbf{r}} = (x; y; 0)$ con $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_O$:

$$(x; y; 0) \times (0; 0; -1000) = (-1000 y; 1000 x; 0)$$

$$-1000 y = -2500 \Rightarrow y = 2,50 \text{ m} \quad 1000 x = 3600 \Rightarrow x = 3,60 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{\mathbf{R}} = 1000 \text{ N}$ hacia abajo y $\vec{\mathbf{M}}_O = -2500 \hat{i} + 3600 \hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}$; $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = 0$, así que el sistema equivale a la sola fuerza de 1000 N hacia abajo aplicada en (3,60; 2,50; 0) m.

Por qué el par *sí* corrió el punto de aplicación

Sin el par, el punto sería el promedio ponderado de las cargas: $\bar{x} = \frac{(2)(400) + (5)(600)}{1000} = 3,80$ y $\bar{y} = \frac{(1)(400) + (4)(600)}{1000} = 2,80$. El par de $300 \hat{i} - 200 \hat{j}$ corrió la línea de acción hasta (3,60; 2,50). Un par no aporta fuerza, pero sí mueve de sitio la resultante.

Chequeo de sentido común

$$(3,60; 2,50; 0) \times (0; 0; -1000) = (-2500; 3600; 0) = \vec{\mathbf{M}}_O. \quad \checkmark$$

Punto 3

PASO 1 Las tres fuerzas

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = 600 \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right) = 400 \hat{i} - 200 \hat{j} - 400 \hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = 700 \left(\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7} \right) = 200 \hat{i} + 600 \hat{j} + 300 \hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_3 = 500 \left(-\frac{4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right) = -400 \hat{i} + 0 \hat{j} + 300 \hat{k} \text{ N}$$

PASO 2 Resultante

$$\vec{\mathbf{R}} = 200\hat{i} + 400\hat{j} + 200\hat{k} \quad [\text{N}]$$

$$|\vec{\mathbf{R}}| = \sqrt{40\,000 + 160\,000 + 40\,000} = \sqrt{240\,000} = 489,90 \text{ N}$$

PASO 3 Momento respecto a O

$$(0; 0; 0,5) \times \vec{\mathbf{F}}_1 = (0 - (0,5)(-200); (0,5)(400) - 0; 0) = (100; 200; 0)$$

$$(0,8; 0; 0) \times \vec{\mathbf{F}}_2 = (0 - 0; 0 - (0,8)(300); (0,8)(600) - 0) = (0; -240; 480)$$

$$(0; 0,6; 0) \times \vec{\mathbf{F}}_3 = ((0,6)(300) - 0; 0 - 0; 0 - (0,6)(-400)) = (180; 0; 240)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O = 280\hat{i} - 40\hat{j} + 720\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 La prueba

$$\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = (280)(200) + (-40)(400) + (720)(200) = 56\,000 - 16\,000 + 144\,000 = 184\,000 \neq 0$$

Hay torsor.

PASO 5 Paso y momento del torsor

$$\hat{\lambda} = \frac{(200; 400; 200)}{489,90} = (0,4082; 0,8165; 0,4082)$$

$$M_{\parallel} = \frac{184\,000}{489,90} = 375,59 \text{ N} \cdot \text{m} \quad p = \frac{375,59}{489,90} = 0,7667 \text{ m}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 375,59 (0,4082; 0,8165; 0,4082) = (153,33; 306,67; 153,33) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 6 Momento perpendicular y eje

$$\vec{\mathbf{M}}_{\perp} = (280 - 153,33; -40 - 306,67; 720 - 153,33) = (126,67; -346,67; 566,67) \text{ N} \cdot \text{m}$$

El plano xz es $y = 0$, así que $\vec{\mathbf{r}} = (x; 0; z)$:

$$(x; 0; z) \times (200; 400; 200) = (-400z; 200z - 200x; 400x)$$

$$400x = 566,67 \Rightarrow x = 1,4167 \text{ m} \quad -400z = 126,67 \Rightarrow z = -0,3167 \text{ m}$$

$$(\text{control}) \quad 200(-0,3167) - 200(1,4167) = -63,3 - 283,3 = -346,6 \checkmark$$

Respuesta: Hay torsor: $\vec{\mathbf{R}} = 200\hat{i} + 400\hat{j} + 200\hat{k}$ N (489,90 N), $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 153,33\hat{i} + 306,67\hat{j} + 153,33\hat{k}$ N·m y paso $p = 0,7667$ m. El eje interseca el plano xz en $(1,4167; 0; -0,3167)$ m.

Chequeo de sentido común

Tres verificaciones:

$$1. |\vec{\mathbf{F}}_1| = 600, |\vec{\mathbf{F}}_2| = 700, |\vec{\mathbf{F}}_3| = 500 \text{ N}. \checkmark$$

$$2. \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = p \vec{\mathbf{R}}: 0,7667 \times (200; 400; 200) = (153,33; 306,67; 153,33). \checkmark$$

$$3. \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = (153,33; 306,67; 153,33) + (126,67; -346,67; 566,67) = (280; -40; 720) = \vec{\mathbf{M}}_O. \checkmark$$

Respuestas rápidas — Simulacro 4

- 1 $\theta_y = 125,17^\circ$; $\vec{\mathbf{F}} = 427,22\hat{i} - 524,23\hat{j} + 608,91\hat{k}$ N; $\vec{\mathbf{M}}_O = 3923,63\hat{i} + 1708,88\hat{j} - 1281,66\hat{k}$ N·m; $M_{OG} = 2780,12$ N · m
- 2 $\vec{\mathbf{R}} = -1000\hat{k}$ N; $\vec{\mathbf{M}}_O = -2500\hat{i} + 3600\hat{j}$ N·m; $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = 0 \Rightarrow$ una sola fuerza por (3,60; 2,50; 0) m
- 3 $\vec{\mathbf{R}} = 200\hat{i} + 400\hat{j} + 200\hat{k}$ N (489,90 N); $\vec{\mathbf{M}}_O = 280\hat{i} - 40\hat{j} + 720\hat{k}$ N·m; $p = 0,7667$ m; $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 153,33\hat{i} + 306,67\hat{j} + 153,33\hat{k}$ N·m; eje por (1,4167; 0; -0,3167) m

Si llegaste hasta aquí

Ya resolviste 12 puntos de simulacro y 24 problemas de taller, todos con el mismo patrón que usa el profesor. Lo único que falta el día del parcial es lo de siempre: leer bien el enunciado, escribir las unidades y dejar diez minutos para verificar.