

TALLER 0

Vectores en el espacio: componentes, ángulos directores y producto punto

Semana del programa: Semana 1, clases 1 y 2 • Tiempo sugerido: 3 horas

1. Lo que necesitas de este tema

La única idea del taller

Una fuerza en el espacio casi nunca te la dan en componentes. Te dan **por dónde pasa** (dos puntos, un cable, una barra) y **cuánto vale** (la magnitud). Convertir eso en $\vec{\mathbf{F}} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ es el paso que abre todos los demás temas del curso.

La receta es siempre la misma, en tres movimientos:

$$\vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \quad \hat{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B}}{|\vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B}|} \quad \boxed{\vec{\mathbf{F}} = F \hat{\lambda}_{AB}}$$

El vector $\hat{\lambda}_{AB}$ es *solo dirección*: su magnitud vale 1 y no tiene unidades. La magnitud F es *solo tamaño*. El producto de los dos es la fuerza completa.

Ángulos directores

Son los tres ángulos que la fuerza forma con los ejes *positivos* x , y y z :

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

y siempre, sin excepción, se cumple la identidad que te sirve de chequeo y de herramienta:

$$\boxed{\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1}$$

Los tres cosenos directores son exactamente las componentes de $\hat{\lambda}$. Por eso $\hat{\lambda} = \cos \theta_x \hat{i} + \cos \theta_y \hat{j} + \cos \theta_z \hat{k}$.

Producto punto: la máquina de medir ángulos y proyecciones

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\vec{\mathbf{A}}| |\vec{\mathbf{B}}| \cos \theta$$

De ahí salen las dos cosas que vas a usar todo el semestre:

- **Ángulo entre dos líneas:** $\cos \theta = \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{|\vec{\mathbf{A}}| |\vec{\mathbf{B}}|}$
- **Proyección de una fuerza sobre una línea:** $F_\ell = \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\lambda}_\ell$ (escalar, con signo)

El resultado del producto punto es un **número**, no un vector. Si te queda un vector, te equivocaste de producto.

Cómo saber cuál producto usar

Pregúntate qué quieres de respuesta. ¿Un número (un ángulo, una proyección, un momento respecto a un eje)? Producto punto. ¿Un vector perpendicular a otros dos (un momento respecto a un punto)? Producto cruz. Esa pregunta te ahorra la mitad de los errores del parcial.

El error que más cuesta puntos en el punto 1 del parcial

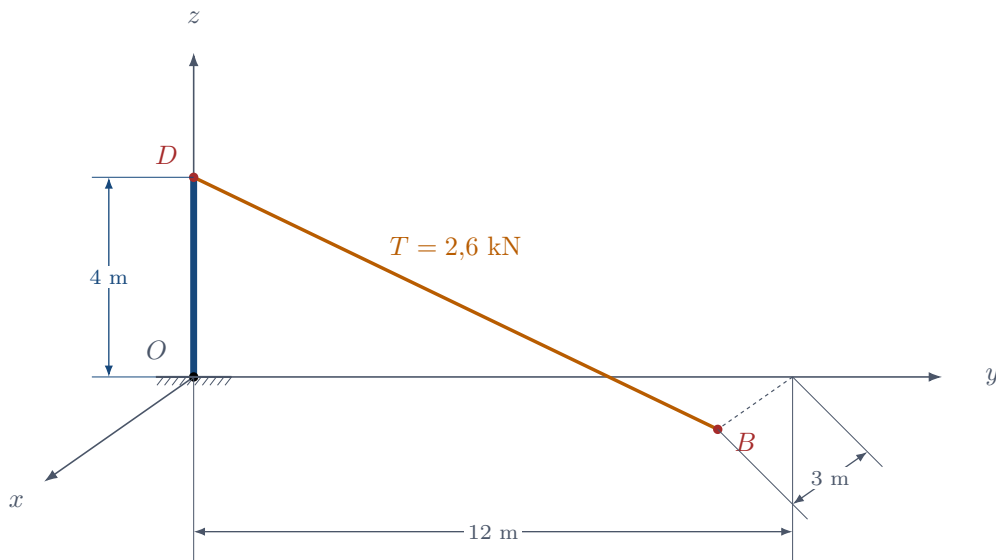
Dividir entre la magnitud *equivocada*. En $\vec{\mathbf{F}} = F \frac{\vec{\mathbf{r}}_{AB}}{|\vec{\mathbf{r}}_{AB}|}$, el denominador es la longitud del **cable** ($|\vec{\mathbf{r}}_{AB}|$), no la magnitud de la fuerza. Si al final $|\vec{\mathbf{F}}|$ no te da exactamente la magnitud que te dieron en el enunciado, te equivocaste en ese paso. Siempre compruébalo.

PARTE A — Enunciados

Problema 0.1 — Cable tensor de un poste

El poste OD de la figura mide 4 m de alto y está sostenido por un cable que va desde el tope D hasta el anclaje B en el piso. La tensión en el cable es de 2,6 kN.

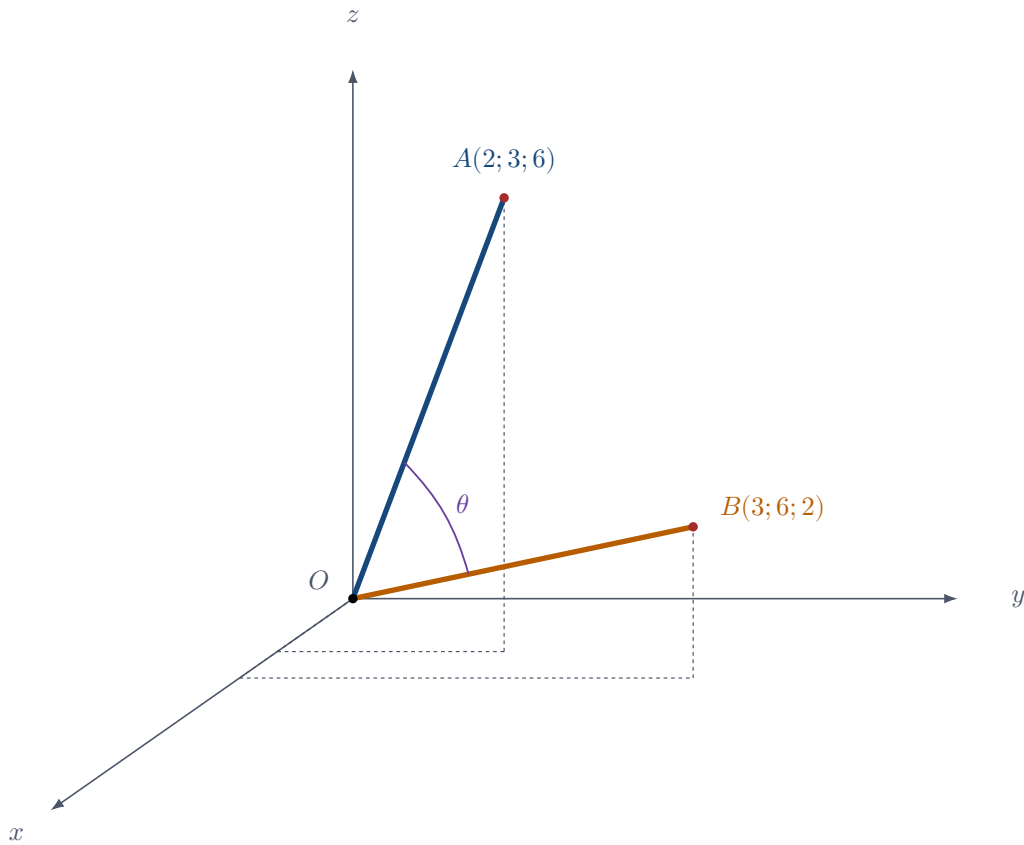
- (a) Escribe como vector la fuerza que el cable ejerce sobre el poste en D .
- (b) Determina los ángulos directores de esa fuerza respecto a los ejes positivos x , y y z .



Problema 0.2 — Ángulo entre dos tuberías

De un nodo O salen dos tuberías rectas: la primera termina en $A(2; 3; 6)$ m y la segunda en $B(3; 6; 2)$ m.

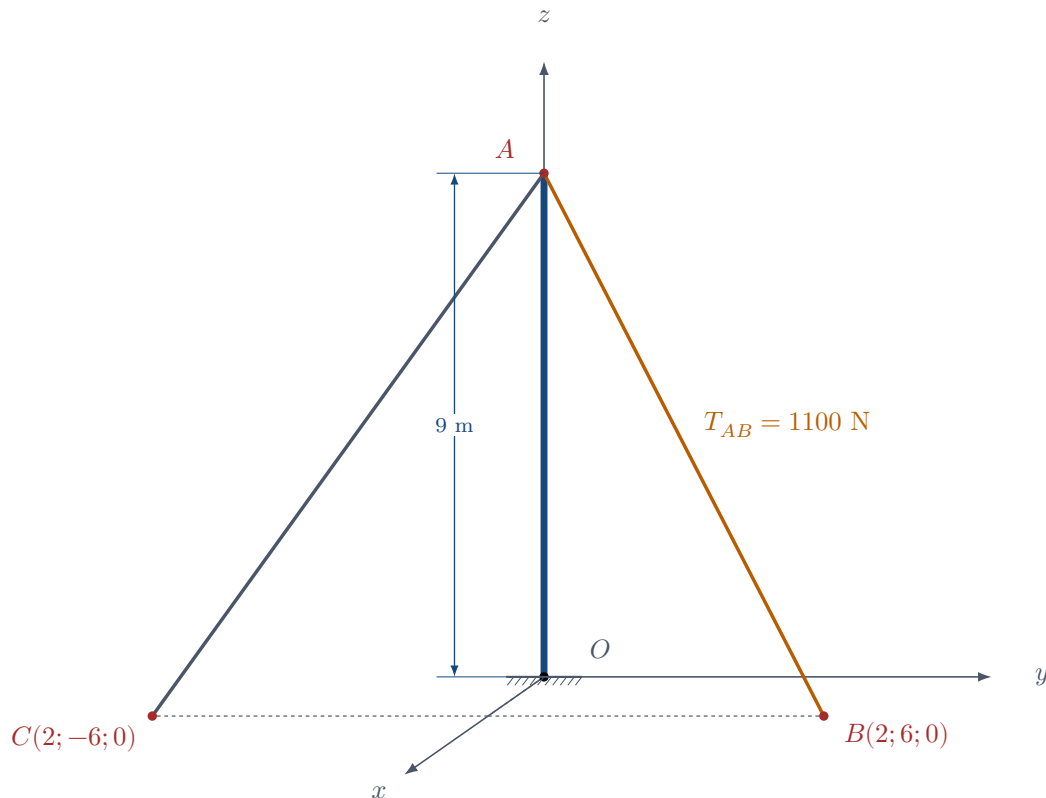
- (a) Determina el ángulo que forman las tuberías OA y OB .
- (b) Determina cuánto mide la proyección del tramo OA sobre la dirección OB .



Problema 0.3 — Proyección de la fuerza de un cable sobre otro

La antena vertical OA mide 9 m y está sostenida por dos cables anclados en el piso: AB y AC , con $B(2; 6; 0)$ m y $C(2; -6; 0)$ m. La tensión en el cable AB es de 1100 N.

- Escribe como vector la fuerza que el cable AB ejerce en A .
- Determina la proyección de esa fuerza sobre la línea AC .
- Determina el ángulo que forman los dos cables.

**Problema 0.4 — Fuerzas dadas por sus ángulos directores**

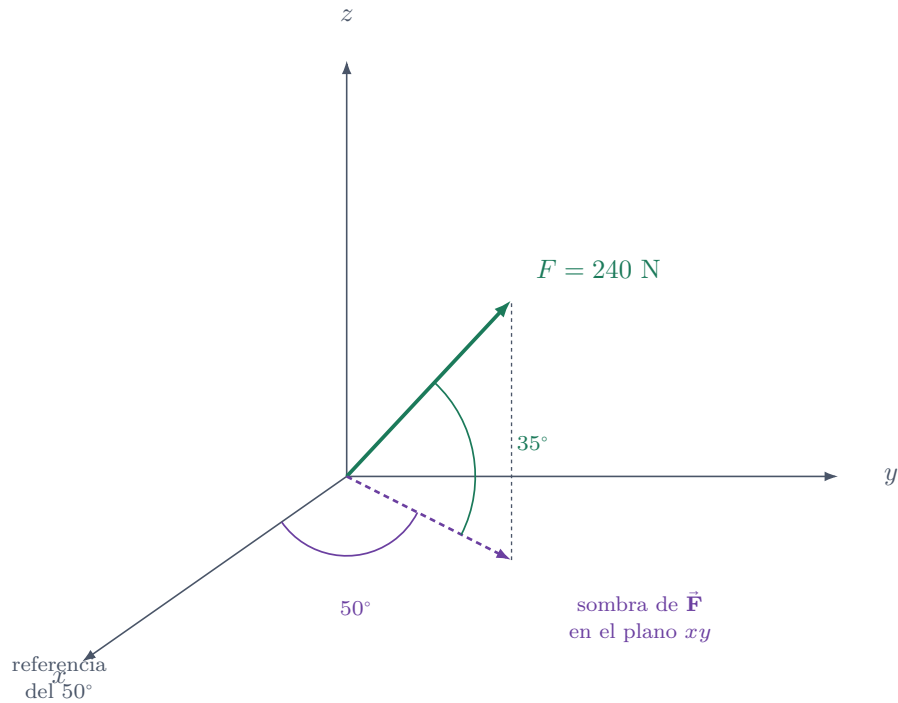
Sobre el punto O actúan dos fuerzas:

- $\vec{F}_1$, de magnitud 900 N, con $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$ y θ_z obtuso.
- $\vec{F}_2$, de magnitud 600 N, con cosenos directores $(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

- Determina θ_z de $\vec{F}_1$ y escribe $\vec{F}_1$ en componentes.
- Determina la resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, su magnitud y sus ángulos directores.

Problema 0.5 — Fuerza definida por dos ángulos

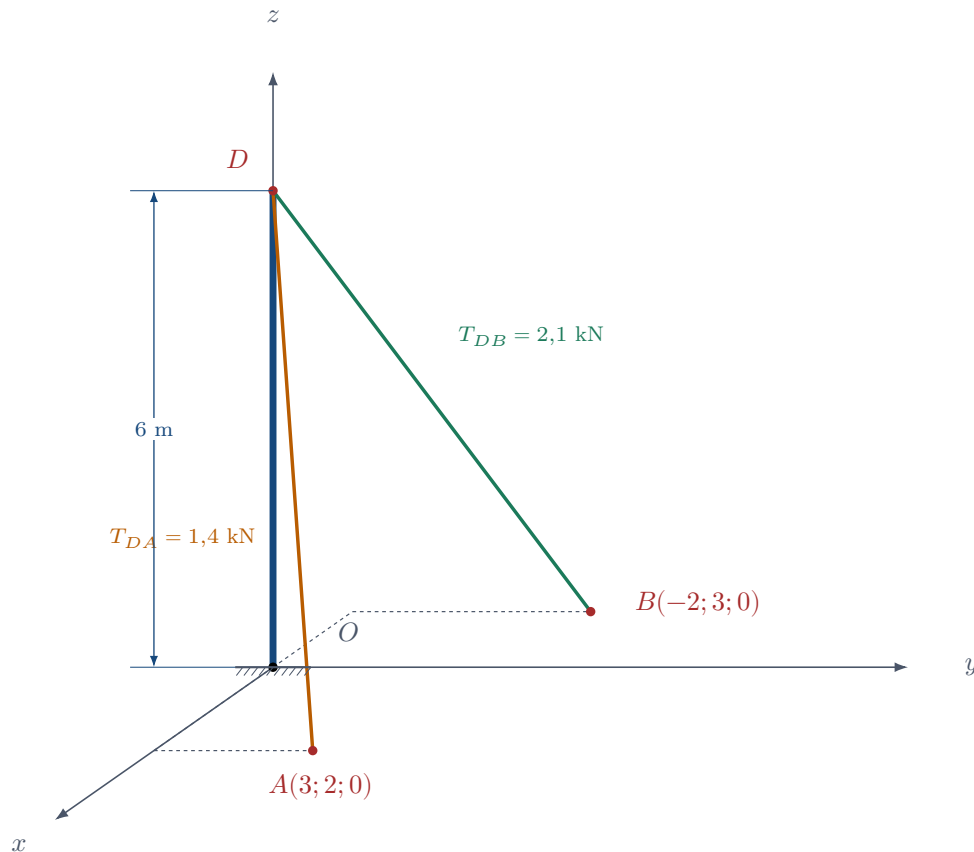
Una fuerza de 240 N actúa sobre el brazo AB . La línea de acción forma 35° con el plano horizontal xy , y su sombra sobre ese plano forma 50° con el eje x . Determina las tres componentes de la fuerza y sus ángulos directores.



Problema 0.6 — Nivel parcial: torre con dos tensores

La torre OD mide 6 m y está tensada por dos cables que salen de su tope D hacia los anclajes $A(3; 2; 0)$ m y $B(-2; 3; 0)$ m. Las tensiones valen $T_{DA} = 1,4$ kN y $T_{DB} = 2,1$ kN.

- Escribe las dos fuerzas como vectores.
- Determina la resultante que los cables ejercen sobre D , su magnitud y sus ángulos directores.
- Determina la proyección de esa resultante sobre el eje de la torre, en el sentido $D \rightarrow O$.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 0.1 — Cable tensor de un poste

Ruta de solución

La fuerza va por el cable, así que su dirección es la del segmento $D \rightarrow B$. Primero armo el vector que va de D a B restando coordenadas, luego lo vuelvo unitario dividiéndolo entre su propia longitud, y por último lo multiplico por los 2,6 kN. Con las tres componentes ya puedo sacar los ángulos directores dividiendo cada una entre 2,6.

PASO 1 Escribe las coordenadas de los dos extremos del cable

El cable arranca en el tope del poste y termina en el anclaje:

$$D(0; 0; 4) \text{ m} \quad B(3; 12; 0) \text{ m}$$

El origen O está en la base del poste, el eje z sube por el poste, el eje y va hacia la derecha y el eje x hacia el observador.

PASO 2 Arma el vector de posición $D \rightarrow B$

Siempre en el orden *llegada menos salida*, porque la fuerza va del poste hacia el anclaje:

$$\vec{r}_{D \rightarrow B} = (3 - 0)\hat{i} + (12 - 0)\hat{j} + (0 - 4)\hat{k} = 3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k} \quad [\text{m}]$$

La componente z sale negativa porque el cable *baja*: de $z = 4$ a $z = 0$.

PASO 3 Calcula la longitud del cable

$$|\vec{r}_{D \rightarrow B}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

PASO 4 Construye el vector unitario

$$\hat{\lambda}_{DB} = \frac{3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}}{13} = 0,2308\hat{i} + 0,9231\hat{j} - 0,3077\hat{k}$$

Este vector no tiene unidades y su magnitud es 1. Compruébalo: $\sqrt{0,2308^2 + 0,9231^2 + 0,3077^2} = 1,000$.

PASO 5 Multiplica por la magnitud de la tensión

$$\vec{T} = 2,6 \text{ kN} \cdot \hat{\lambda}_{DB} = \frac{2,6}{13} (3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}) = 0,2 (3\hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{T} = 0,6\hat{i} + 2,4\hat{j} - 0,8\hat{k} \quad [\text{kN}]}$$

El atajo que ahorra tiempo en el parcial

Fíjate en el factor $\frac{2,6}{13} = 0,2$. Cuando la magnitud y la longitud tienen divisores comunes, no calcules el unitario con decimales: multiplica el vector entero por la fracción. Menos decimales, menos errores de redondeo, y las componentes salen exactas.

PASO 6 Ángulos directores

Cada coseno director es la componente dividida entre la magnitud total (2,6 kN):

$$\cos \theta_x = \frac{0,6}{2,6} = 0,2308 \quad \cos \theta_y = \frac{2,4}{2,6} = 0,9231 \quad \cos \theta_z = \frac{-0,8}{2,6} = -0,3077$$

$$\theta_x = 76,66^\circ \quad \theta_y = 22,62^\circ \quad \theta_z = 107,92^\circ$$

Respuesta: $\vec{T} = 0,6\hat{i} + 2,4\hat{j} - 0,8\hat{k}$ kN, con $\theta_x = 76,66^\circ$, $\theta_y = 22,62^\circ$ y $\theta_z = 107,92^\circ$. El ángulo θ_z es obtuso porque la fuerza jala hacia abajo: el cable tira del tope del poste hacia el piso, no hacia el cielo.

El error concreto de este problema

Escribir $\vec{r}_{B \rightarrow D}$ en vez de $\vec{r}_{D \rightarrow B}$. Los dos vectores tienen la misma longitud y la misma línea, pero **sentido opuesto**: te saldría $\vec{T} = -0,6\hat{i} - 2,4\hat{j} + 0,8\hat{k}$, que representa un cable *empujando* el poste hacia arriba. Un cable nunca empuja. Pregúntate siempre: ¿hacia dónde jala? Ese es el orden correcto de la resta.

Chequeo de sentido común

Dos comprobaciones de diez segundos:

1. $|\vec{T}| = \sqrt{0,6^2 + 2,4^2 + 0,8^2} = \sqrt{0,36 + 5,76 + 0,64} = \sqrt{6,76} = 2,6$ kN. Coincide con el dato. Si no coincidiera, el error está en el paso 4.
2. $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 0,0533 + 0,8521 + 0,0947 = 1,000$. ✓

Problema 0.2 — Ángulo entre dos tuberías

Ruta de solución

Como el nodo está en el origen, los vectores de las dos tuberías son directamente las coordenadas de A y de B . El producto punto me da $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$; como puedo calcular las tres cosas menos θ , despejo el coseno. Para la proyección no necesito el ángulo: basta dividir el producto punto entre la magnitud de aquello *sobre lo que* proyecto.

PASO 1 Escribe los dos vectores

$$\vec{r}_{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m} \quad \vec{r}_{OB} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} \text{ m}$$

PASO 2 Calcula las dos magnitudes

$$|\vec{r}_{OA}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \text{ m} \quad |\vec{r}_{OB}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7 \text{ m}$$

PASO 3 Calcula el producto punto

Componente por componente, y se suman los tres productos:

$$\vec{r}_{OA} \cdot \vec{r}_{OB} = (2)(3) + (3)(6) + (6)(2) = 6 + 18 + 12 = 36 \text{ m}^2$$

PASO 4 Despeja el ángulo

$$\cos \theta = \frac{\vec{r}_{OA} \cdot \vec{r}_{OB}}{|\vec{r}_{OA}||\vec{r}_{OB}|} = \frac{36}{(7)(7)} = \frac{36}{49} = 0,7347 \quad \Rightarrow \quad \theta = 42,72^\circ$$

PASO 5 Proyección de OA sobre la dirección OB

La proyección es la sombra de un vector sobre la línea del otro. Se obtiene con el mismo producto punto, pero dividiendo solo entre la magnitud de OB :

$$(\text{proy})_{OB} = \vec{r}_{OA} \cdot \hat{\lambda}_{OB} = \vec{r}_{OA} \cdot \frac{\vec{r}_{OB}}{|\vec{r}_{OB}|} = \frac{36}{7} = 5,143 \text{ m}$$

Respuesta: Las tuberías forman $\theta = 42,72^\circ$ y la proyección de OA sobre OB mide 5,143 m. Que la proyección (5,14 m) sea menor que $|OA| = 7 \text{ m}$ significa que la tubería OA se “acuesta” sobre OB perdiendo longitud aparente: es la sombra de una vara inclinada.

Dividir entre lo que no es

Para el **ángulo** se divide entre las *dos* magnitudes. Para la **proyección** se divide entre *una sola*: la de la línea sobre la que proyectas. Mucha gente escribe $36/49$ para la proyección y entrega 0,73 m, que ni siquiera tiene unidades de longitud correctas. Mira las unidades: $\text{m}^2/\text{m} = \text{m}$. Una división.

Chequeo de sentido común

La proyección nunca puede ser mayor que la magnitud del vector proyectado: $5,143 \text{ m} \leq 7 \text{ m}$.
✓ Además, como $\theta < 90^\circ$, la proyección tiene que salir positiva, y salió positiva. Si te hubiera dado negativa con un ángulo agudo, hay un error de signo en alguna componente.

Problema 0.3 — Proyección de la fuerza de un cable sobre otro

Ruta de solución

Tres preguntas, un solo montaje. Escribo los vectores de los dos cables desde A (los dos salen de A hacia el piso). Con AB y la tensión armo la fuerza. Con AC armo el unitario de la línea sobre la que voy a proyectar. El producto punto de esos dos me sirve para las partes (b) y (c) sin repetir cuentas.

PASO 1 Coordenadas y vectores de los dos cables

$$A(0; 0; 9) \text{ m} \quad B(2; 6; 0) \text{ m} \quad C(2; -6; 0) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{A \rightarrow B} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k} \text{ m} \quad \vec{r}_{A \rightarrow C} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 9\hat{k} \text{ m}$$

Los dos son idénticos salvo el signo de $\hat{j}$: los cables son simétricos respecto al plano xz . Eso hará que las dos longitudes salgan iguales.

PASO 2 Longitudes

$$|\vec{r}_{A \rightarrow B}| = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11 \text{ m} \quad |\vec{r}_{A \rightarrow C}| = \sqrt{4 + 36 + 81} = 11 \text{ m}$$

PASO 3 (a) La fuerza del cable AB

$$\vec{T}_{AB} = 1100 \text{ N} \cdot \frac{2\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k}}{11} = 100 (2\hat{i} + 6\hat{j} - 9\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{T}_{AB} = 200\hat{i} + 600\hat{j} - 900\hat{k} \quad [\text{N}]}$$

PASO 4 Unitario de la línea AC

$$\hat{\lambda}_{AC} = \frac{2\hat{i} - 6\hat{j} - 9\hat{k}}{11} = 0,1818\hat{i} - 0,5455\hat{j} - 0,8182\hat{k}$$

PASO 5 (b) Proyección de la fuerza sobre AC

$$(T_{AB})_{AC} = \vec{T}_{AB} \cdot \hat{\lambda}_{AC} = \frac{(200)(2) + (600)(-6) + (-900)(-9)}{11} = \frac{400 - 3600 + 8100}{11} = \frac{4900}{11}$$

$$(T_{AB})_{AC} = 445,45 \text{ N}$$

PASO 6 (c) Ángulo entre los dos cables

$$\cos \theta = \frac{\vec{r}_{A \rightarrow B} \cdot \vec{r}_{A \rightarrow C}}{(11)(11)} = \frac{4 - 36 + 81}{121} = \frac{49}{121} = 0,4050 \quad \Rightarrow \quad \theta = 66,11^\circ$$

Respuesta: $\vec{T}_{AB} = 200\hat{i} + 600\hat{j} - 900\hat{k}$ N; la proyección sobre AC vale 445,45 N y los cables abren un ángulo de $66,11^\circ$. La proyección salió **positiva**: la fuerza del cable AB tiene una componente que apunta *hacia* C , es decir, tiende a estirar el otro cable, no a aflojarlo.

Relación entre (b) y (c)

No son dos cuentas independientes. Como $|\vec{T}_{AB}| = 1100 \text{ N}$ y $\theta = 66,11^\circ$, la proyección también sale de $1100 \cos(66,11^\circ) = 445,4 \text{ N}$. Si en el parcial te sobra un minuto, esa es la verificación cruzada más rápida que existe.

El signo de la componente z

Los dos cables *bajan* desde A , así que las dos componentes $\hat{k}$ son negativas. Al multiplicarlas entre sí en el producto punto, $(-9)(-9) = +81$ queda positivo y domina la suma. Si escribes uno de los dos con $\hat{k}$ positivo, el producto te da $4 - 36 - 81 = -113$ y el ángulo te sale obtuso (159°), que es geoméricamente absurdo para dos cables que salen del mismo punto hacia el mismo lado del piso.

Chequeo de sentido común

$|\vec{T}_{AB}| = \sqrt{200^2 + 600^2 + 900^2} = \sqrt{40\,000 + 360\,000 + 810\,000} = \sqrt{1\,210\,000} = 1100 \text{ N}$. ✓
Y el ángulo: los cables están separados 12 m en el piso (y de -6 a $+6$) y cuelgan de 9 m de alto. Un triángulo así abre claramente más de 60° y menos de 90° . Los $66,11^\circ$ son razonables.

Problema 0.4 — Fuerzas dadas por sus ángulos directores**Ruta de solución**

Aquí no hay geometría que medir: los cosenos directores *son* el vector unitario. Para $\vec{F}_1$ me falta uno de los tres ángulos, y lo saco de la identidad $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$. Esa ecuación da dos raíces, y el enunciado me dice cuál escoger. Después es sumar componente a componente y volver a sacar ángulos.

PASO 1 Despeja el coseno que falta

$$\cos^2 \theta_z = 1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ = 1 - (0,5)^2 - (0,7071)^2 = 1 - 0,25 - 0,50 = 0,25$$

$$\cos \theta_z = \pm 0,5 \quad \Rightarrow \quad \theta_z = 60^\circ \text{ o } \theta_z = 120^\circ$$

El enunciado dice que θ_z es **obtuso**, así que $\theta_z = 120^\circ$ y $\cos \theta_z = -0,5$.

Por qué la raíz cuadrada da dos respuestas y no es un descuido

Dos fuerzas distintas pueden formar los mismos ángulos con x y con y : una apunta hacia arriba y la otra hacia abajo, como un reflejo en el plano xy . Por eso el problema *tiene* que decirte si θ_z es agudo u obtuso, o dibujarte la fuerza. Si un enunciado no lo dice, la respuesta correcta es dar las dos.

PASO 2 Componentes de $\vec{F}_1$

$$\vec{F}_1 = 900 (0,5 \hat{i} + 0,7071 \hat{j} - 0,5 \hat{k})$$

$$\vec{F}_1 = 450 \hat{i} + 636,40 \hat{j} - 450 \hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 3 Componentes de $\vec{F}_2$

Los cosenos directores ya vienen dados, así que solo hay que multiplicar:

$$\vec{F}_2 = 600 \left(\frac{1}{3} \hat{i} - \frac{2}{3} \hat{j} + \frac{2}{3} \hat{k} \right) = 200 \hat{i} - 400 \hat{j} + 400 \hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 4 Suma vectorial, componente por componente

$$R_x = 450 + 200 = 650 \text{ N} \quad R_y = 636,40 - 400 = 236,40 \text{ N} \quad R_z = -450 + 400 = -50 \text{ N}$$

$$\vec{R} = 650 \hat{i} + 236,40 \hat{j} - 50 \hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 5 Magnitud de la resultante

$$|\vec{R}| = \sqrt{650^2 + 236,40^2 + 50^2} = \sqrt{422\,500 + 55\,885 + 2\,500} = \sqrt{480\,885} = 693,46 \text{ N}$$

PASO 6 Ángulos directores de la resultante

$$\cos \theta_x = \frac{650}{693,46} = 0,9373 \quad \cos \theta_y = \frac{236,40}{693,46} = 0,3409 \quad \cos \theta_z = \frac{-50}{693,46} = -0,0721$$

$$\theta_x = 20,39^\circ \quad \theta_y = 70,07^\circ \quad \theta_z = 94,13^\circ$$

Respuesta: θ_z de $\vec{F}_1$ vale 120° ; $\vec{F}_1 = 450 \hat{i} + 636,40 \hat{j} - 450 \hat{k}$ N; $\vec{R} = 650 \hat{i} + 236,40 \hat{j} - 50 \hat{k}$ N con $|\vec{R}| = 693,46$ N y $\theta_x = 20,39^\circ$, $\theta_y = 70,07^\circ$, $\theta_z = 94,13^\circ$. La resultante quedó casi horizontal ($\theta_z \approx 94^\circ$, es decir casi perpendicular al eje z) porque las componentes verticales de las dos fuerzas se cancelaron casi por completo: -450 contra $+400$.

Chequeo de sentido común

$|\vec{R}| = 693,46$ N tiene que ser menor que $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 1500$ N (desigualdad triangular) y mayor que $|900 - 600| = 300$ N. Se cumple. ✓

Y la identidad: $0,9373^2 + 0,3409^2 + 0,0721^2 = 0,8785 + 0,1162 + 0,0052 = 0,9999 \approx 1$. ✓

Problema 0.5 — Fuerza definida por dos ángulos

Ruta de solución

Este es el problema de “la sombra”. La fuerza no forma ángulos directos con los ejes, sino con el plano horizontal. Entonces hay que hacerlo en dos etapas: primero parto la fuerza en *vertical* y *sombra horizontal* usando el ángulo de 35° ; después parto la sombra en x y y usando el ángulo de 50° . Los ángulos directores salen al final, de las componentes ya calculadas.

PASO 1 Primera partición: vertical y sombra

El ángulo de 35° está entre la fuerza y su propia sombra en el plano xy . Entonces la componente vertical es el cateto opuesto y la sombra es el cateto adyacente:

$$F_z = F \sin 35^\circ = 240 (0,5736) = 137,66 \text{ N}$$

$$F_h = F \cos 35^\circ = 240 (0,8192) = 196,60 \text{ N}$$

F_h todavía no es una componente: es la magnitud de la sombra, que vive en el plano xy y hay que volver a partir.

PASO 2 Segunda partición: la sombra en x y en y

Dentro del plano horizontal, la sombra forma 50° con el eje x :

$$F_x = F_h \cos 50^\circ = 196,60 (0,6428) = 126,37 \text{ N}$$

$$F_y = F_h \sin 50^\circ = 196,60 (0,7660) = 150,60 \text{ N}$$

Cómo no equivocarte de seno o coseno

Dibuja el triángulo y pregúntate qué lado toca el ángulo. El lado que **toca** el ángulo (adyacente) lleva coseno; el que queda **enfrente** lleva seno. En el 35° , la sombra toca el ángulo $\Rightarrow$ coseno; la vertical queda enfrente $\Rightarrow$ seno.

PASO 3 El vector completo

$$\vec{F} = 126,37\hat{i} + 150,60\hat{j} + 137,66\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 4 Ángulos directores

$$\cos \theta_x = \frac{126,37}{240} = 0,5265 \quad \cos \theta_y = \frac{150,60}{240} = 0,6275 \quad \cos \theta_z = \frac{137,66}{240} = 0,5736$$

$$\theta_x = 58,23^\circ \quad \theta_y = 51,13^\circ \quad \theta_z = 55,00^\circ$$

Respuesta: $\vec{F} = 126,37\hat{i} + 150,60\hat{j} + 137,66\hat{k}$ N, con $\theta_x = 58,23^\circ$, $\theta_y = 51,13^\circ$ y $\theta_z = 55,00^\circ$. Los tres ángulos son agudos porque la fuerza apunta hacia el primer octante: sus tres componentes son positivas.

El 35° no es θ_z

Es el error clásico de este tipo de enunciado. El 35° se mide desde el **plano** xy ; θ_z se mide desde el **eje** z . Como el eje z es perpendicular a ese plano, son complementarios: $\theta_z = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. Efectivamente nos dio 55,00° en el paso 4. Si el enunciado dice “forma 35° con el plano”, nunca escribas $\theta_z = 35^\circ$.

Chequeo de sentido común

$\sqrt{126,37^2 + 150,60^2 + 137,66^2} = \sqrt{15\,969 + 22\,680 + 18\,950} = \sqrt{57\,599} = 240,0\text{ N. } \checkmark$
Y la identidad: $0,5265^2 + 0,6275^2 + 0,5736^2 = 0,2772 + 0,3938 + 0,3290 = 1,000. \checkmark$

Problema 0.6 — Nivel parcial: torre con dos tensores**Ruta de solución**

Es el Problema 0.1 hecho dos veces y luego sumado. Armo cada fuerza con la receta $\vec{F} = F \hat{\lambda}$, las sumo componente a componente para obtener la resultante, saco su magnitud y sus ángulos directores, y por último proyecto la resultante sobre la dirección $D \rightarrow O$, que es simplemente $-\hat{k}$.

PASO 1 Los dos vectores de posición, desde D

$$D(0; 0; 6)\text{ m} \quad A(3; 2; 0)\text{ m} \quad B(-2; 3; 0)\text{ m}$$

$$\vec{r}_{D \rightarrow A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}\text{ m} \quad \vec{r}_{D \rightarrow B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}\text{ m}$$

PASO 2 Longitudes de los dos cables

$$|\vec{r}_{D \rightarrow A}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7\text{ m} \quad |\vec{r}_{D \rightarrow B}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7\text{ m}$$

Los dos cables miden 7 m: no es casualidad del problema, es que A y B están a la misma distancia del pie de la torre.

PASO 3 (a) Las dos fuerzas

$$\vec{T}_{DA} = \frac{1,4}{7} (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 0,2 (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 0,6\hat{i} + 0,4\hat{j} - 1,2\hat{k} \quad [\text{kN}]$$

$$\vec{T}_{DB} = \frac{2,1}{7} (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 0,3 (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = -0,6\hat{i} + 0,9\hat{j} - 1,8\hat{k} \quad [\text{kN}]$$

PASO 4 (b) Resultante

$$R_x = 0,6 - 0,6 = 0 \quad R_y = 0,4 + 0,9 = 1,3\text{ kN} \quad R_z = -1,2 - 1,8 = -3,0\text{ kN}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1,3\hat{j} - 3,0\hat{k} \quad [\text{kN}]}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{0^2 + 1,3^2 + 3,0^2} = \sqrt{1,69 + 9,00} = \sqrt{10,69} = 3,2696\text{ kN}$$

PASO 5 Ángulos directores de la resultante

$$\cos \theta_x = \frac{0}{3,2696} = 0 \quad \cos \theta_y = \frac{1,3}{3,2696} = 0,3976 \quad \cos \theta_z = \frac{-3,0}{3,2696} = -0,9175$$

$$\theta_x = 90,00^\circ \quad \theta_y = 66,57^\circ \quad \theta_z = 156,57^\circ$$

PASO 6 (c) Proyección sobre el eje de la torre, sentido $D \rightarrow O$

La dirección $D \rightarrow O$ es la del vector $(0; 0; -6)$, o sea $\hat{\lambda}_{DO} = -\hat{k}$:

$$R_{DO} = \vec{\mathbf{R}} \cdot (-\hat{k}) = (1,3)(0) + (-3,0)(-1) = 3,0 \text{ kN}$$

Respuesta: $\vec{\mathbf{T}}_{DA} = 0,6\hat{i} + 0,4\hat{j} - 1,2\hat{k}$ kN; $\vec{\mathbf{T}}_{DB} = -0,6\hat{i} + 0,9\hat{j} - 1,8\hat{k}$ kN; $\vec{\mathbf{R}} = 1,3\hat{j} - 3,0\hat{k}$ kN con $|\vec{\mathbf{R}}| = 3,2696$ kN, $\theta_x = 90,00^\circ$, $\theta_y = 66,57^\circ$, $\theta_z = 156,57^\circ$; y la proyección sobre DO vale 3,0 kN. Esa proyección positiva de 3,0 kN es la fuerza con la que los dos cables juntos **comprimen** la torre contra el piso. Es el dato que usaría un diseñador para escoger el perfil del mástil.

El cero de R_x no es un error: es información

Cuando R_x da exactamente cero, la reacción normal es pensar que se perdió un término. Aquí no: $\vec{\mathbf{T}}_{DA}$ aporta $+0,6$ y $\vec{\mathbf{T}}_{DB}$ aporta $-0,6$. Las dos componentes horizontales en x se cancelan, y por eso $\theta_x = 90^\circ$: la resultante está contenida en el plano yz . Si te da cero, comprueba con la suma; si la suma confirma el cero, escríbelo y explica por qué.

Chequeo de sentido común

La suma de las componentes verticales de los dos cables es $-1,2 - 1,8 = -3,0$ kN, y esa es exactamente la proyección que calculamos sobre DO (con signo cambiado porque DO apunta hacia abajo). Los dos caminos coinciden. ✓

Además $|\vec{\mathbf{R}}| = 3,2696$ kN debe ser menor que $1,4 + 2,1 = 3,5$ kN: lo es, y por poco, lo cual tiene sentido porque los dos cables jalan casi en la misma dirección (hacia abajo).

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 0

0.1	$\vec{T} = 0,6\hat{i} + 2,4\hat{j} - 0,8\hat{k}$ kN; $\theta_x = 76,66^\circ$, $\theta_y = 22,62^\circ$, $\theta_z = 107,92^\circ$
0.2	$\theta = 42,72^\circ$; proyección de OA sobre $OB = 5,143$ m
0.3	$\vec{T}_{AB} = 200\hat{i} + 600\hat{j} - 900\hat{k}$ N; proyección sobre $AC = 445,45$ N; $\theta = 66,11^\circ$
0.4	$\theta_z = 120^\circ$; $\vec{F}_1 = 450\hat{i} + 636,40\hat{j} - 450\hat{k}$ N; $\vec{R} = 650\hat{i} + 236,40\hat{j} - 50\hat{k}$ N, $ \vec{R} = 693,46$ N; $\theta_x = 20,39^\circ$, $\theta_y = 70,07^\circ$, $\theta_z = 94,13^\circ$
0.5	$\vec{F} = 126,37\hat{i} + 150,60\hat{j} + 137,66\hat{k}$ N; $\theta_x = 58,23^\circ$, $\theta_y = 51,13^\circ$, $\theta_z = 55,00^\circ$
0.6	$\vec{T}_{DA} = 0,6\hat{i} + 0,4\hat{j} - 1,2\hat{k}$ kN; $\vec{T}_{DB} = -0,6\hat{i} + 0,9\hat{j} - 1,8\hat{k}$ kN; $\vec{R} = 1,3\hat{j} - 3,0\hat{k}$ kN, $ \vec{R} = 3,2696$ kN; $\theta_x = 90,00^\circ$, $\theta_y = 66,57^\circ$, $\theta_z = 156,57^\circ$; $R_{DO} = 3,0$ kN

Antes de pasar al Taller 1

Si resolviste los seis sin mirar la Parte B, ya tienes la mitad del punto 1 del parcial resuelta. Si te trabaste, el punto suele ser uno de estos tres:

1. El orden de la resta en $\vec{r}_{A \rightarrow B}$ (Problema 0.1).
2. Dividir entre una o entre dos magnitudes (Problema 0.2).
3. Confundir un ángulo con un plano con un ángulo director (Problema 0.5).

Vuelve solo a ese, no al taller entero.