

TALLER 1

Momento de una fuerza: respecto a un punto y respecto a un eje

Semana del programa: Semana 1, clase 2 y Semana 2, clase 1 • Tiempo sugerido: 4 horas

1. Lo que necesitas de este tema

Qué es un momento, sin fórmulas todavía

Empuja una puerta justo al lado de la bisagra: no gira. Empújala en el borde de afuera con la misma fuerza: gira fácil. La fuerza es la misma; lo que cambia es **dónde** la aplicas. El momento es exactamente esa idea: mide la capacidad de una fuerza para hacer *girar* un cuerpo alrededor de un punto o de un eje.

Por eso el momento necesita dos cosas: la fuerza $\vec{F}$ y el vector de posición $\vec{r}$ que va **desde el punto respecto al cual tomas momentos hasta cualquier punto de la línea de acción de la fuerza**.

Momento respecto a un PUNTO: producto cruz

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Desarrollado:

$$\vec{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y) \hat{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \hat{k}$$

El resultado es un **vector** perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Su dirección es el eje alrededor del cual la fuerza trata de girar el cuerpo, y el sentido lo da la regla de la mano derecha.

En 2D todo esto se reduce a la tercera componente:

$$M_O = r_x F_y - r_y F_x \quad (+ \text{ antihorario, } - \text{ horario})$$

Momento respecto a un EJE: producto mixto

El momento respecto a un eje es **la parte** del momento que realmente hace girar alrededor de ese eje: su proyección.

$$M_\ell = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda}_\ell = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{\lambda}_\ell \quad M_\ell = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde O es *cualquier* punto del eje y $\hat{\lambda}_\ell$ es el unitario del eje. El resultado es un **número con signo**, no un vector.

La propiedad que te ahorra la mitad de las cuentas

$\vec{r}$ puede ir del punto a *cualquier* punto de la línea de acción de la fuerza. Escoge el que tenga más ceros. En el Problema 1.6 vas a ver cómo un $\vec{r}$ bien escogido convierte un producto cruz de nueve términos en uno de dos.

Teorema de Varignon y distancia perpendicular

El momento de una fuerza es igual a la suma de los momentos de sus componentes. Por eso puedes partir una fuerza inclinada en F_x y F_y y sumar los dos momentos por separado: es el mismo resultado y suele ser más fácil.

Y en sentido inverso, si ya tienes el momento puedes hallar la distancia perpendicular entre el punto y la línea de acción:

$$d = \frac{|\vec{M}_O|}{|\vec{F}|}$$

Las tres confusiones que cuestan puntos

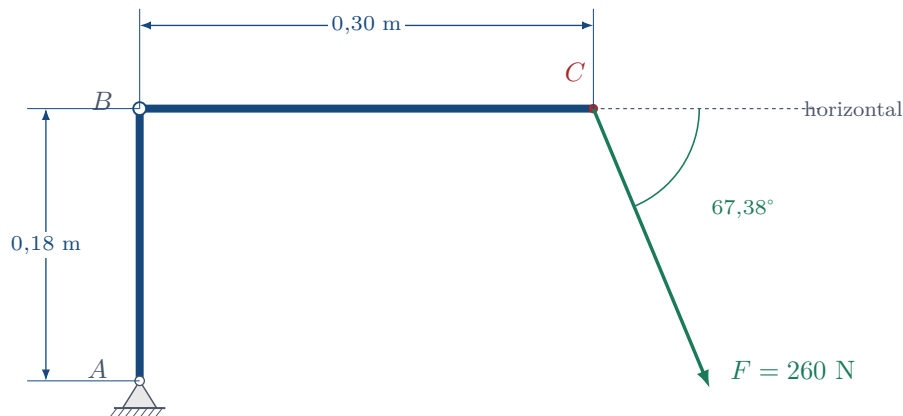
1. **Brazo $\neq$ distancia al punto de aplicación.** El brazo es la distancia *perpendicular* del punto a la *línea de acción*, no al punto donde dibujaste la flecha.
2. **Momento respecto a un punto es vector; respecto a un eje es escalar.** Si te piden M_{AB} y entregas tres componentes, la respuesta está mal escrita.
3. **Una fuerza que corta el eje o es paralela a él no produce momento respecto a ese eje.** Da cero, y eso no es un error: es física.

PARTE A — Enunciados

Problema 1.1 — Ménsula en el plano

Sobre la ménsula ABC actúa en C una fuerza de 260 N con la dirección que muestra la figura (pendiente 12 vertical por cada 5 horizontal). El apoyo de pasador está en A .

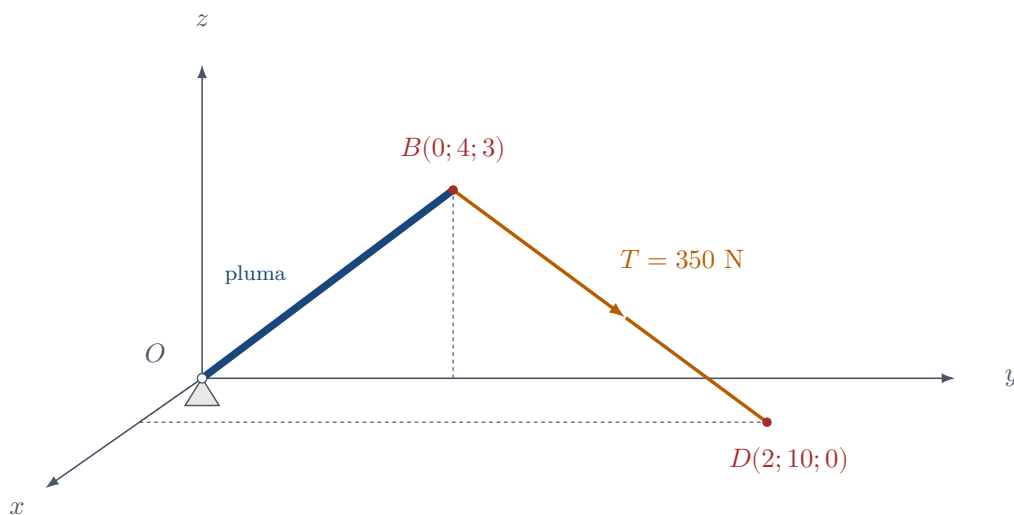
- Determina el momento de esa fuerza respecto a A .
- Determina la distancia perpendicular del punto A a la línea de acción de la fuerza.



Problema 1.2 — Pluma sostenida por un cable

La pluma recta OB está articulada en O y su extremo B está en $(0; 4; 3)\text{ m}$. Un cable va de B al anclaje $D(2; 10; 0)\text{ m}$ y su tensión es de 350 N .

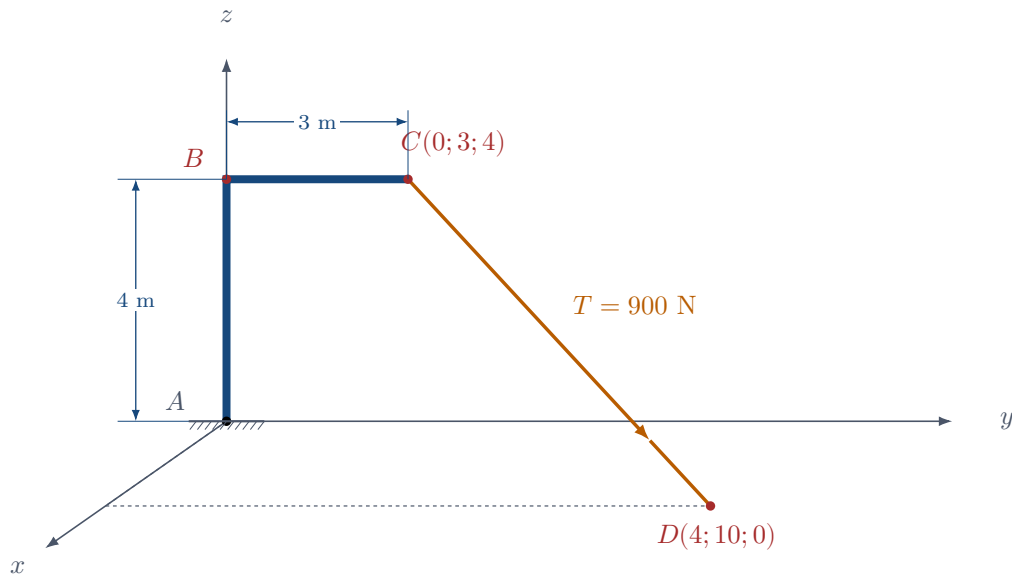
- Determina el momento que esa tensión produce respecto a O .
- Determina la distancia perpendicular de O a la línea de acción del cable.



Problema 1.3 — Tubo acodado: momento respecto a un eje vertical

El tubo ABC está empotrado en el piso en $A(0; 0; 0)$, sube verticalmente hasta $B(0; 0; 4)$ m y luego se acoda horizontalmente hasta $C(0; 3; 4)$ m. En C se ata un cable que va al anclaje $D(4; 10; 0)$ m con una tensión de 900 N.

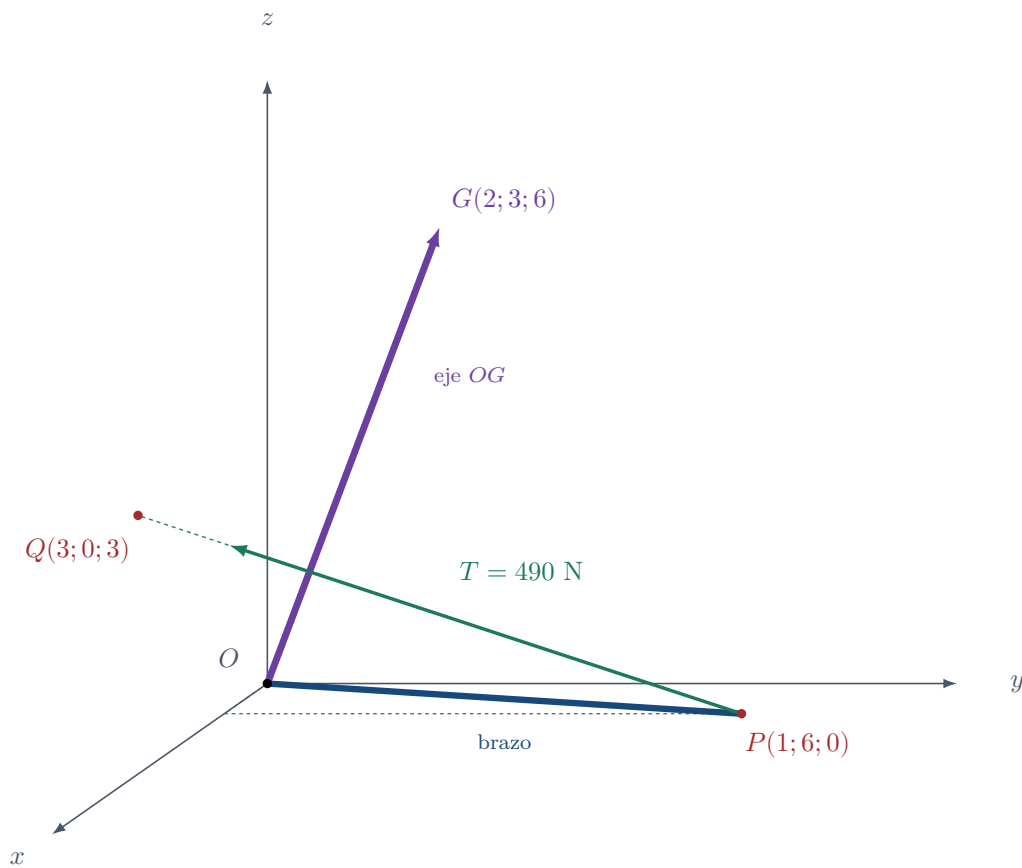
- (a) Determina el momento de la tensión respecto a A .
- (b) Determina el momento respecto al eje AB (el eje vertical del tubo) e interpreta el signo.



Problema 1.4 — Momento respecto a un eje oblicuo

La flecha rígida OG gira alrededor de su propio eje; G está en $(2; 3; 6)$ m. A la flecha está soldado un brazo OP que llega hasta $P(1; 6; 0)$ m. En P se amarra un cable que va hasta $Q(3; 0; 3)$ m con una tensión de 490 N.

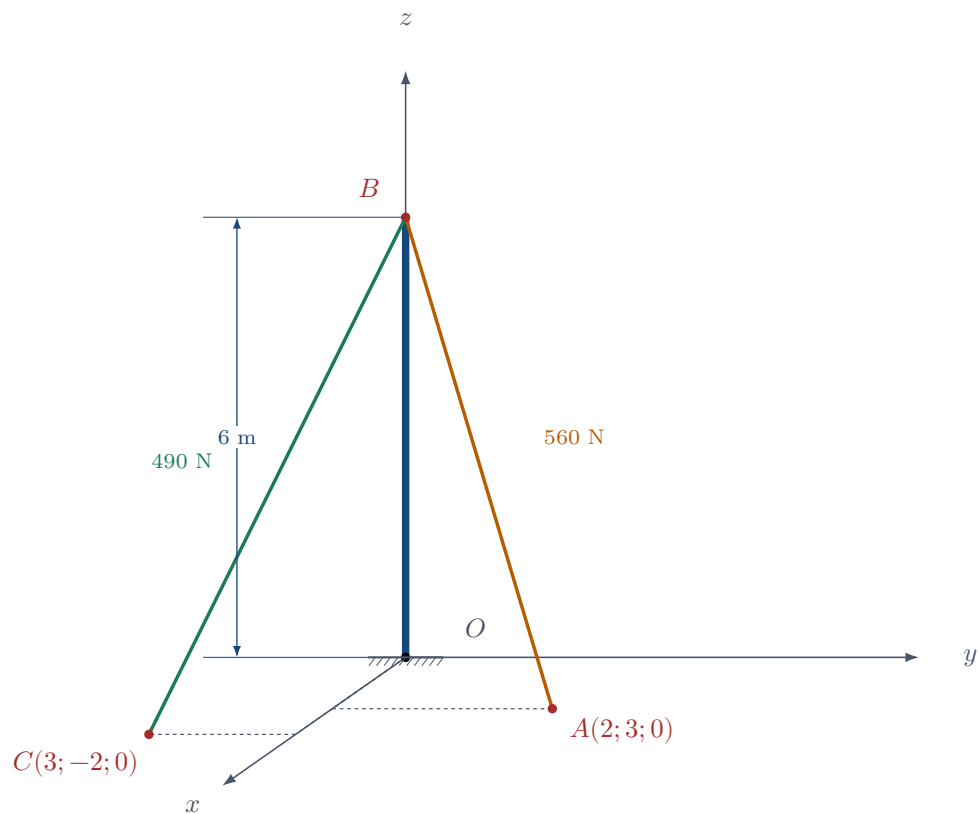
Determina el momento de esa tensión respecto al eje OG y di en qué sentido hace girar la flecha.



Problema 1.5 — Poste con dos cables

Del tope $B(0; 0; 6)$ m de un poste salen dos cables hacia los anclajes $A(2; 3; 0)$ m y $C(3; -2; 0)$ m, con tensiones de 560 N y 490 N respectivamente.

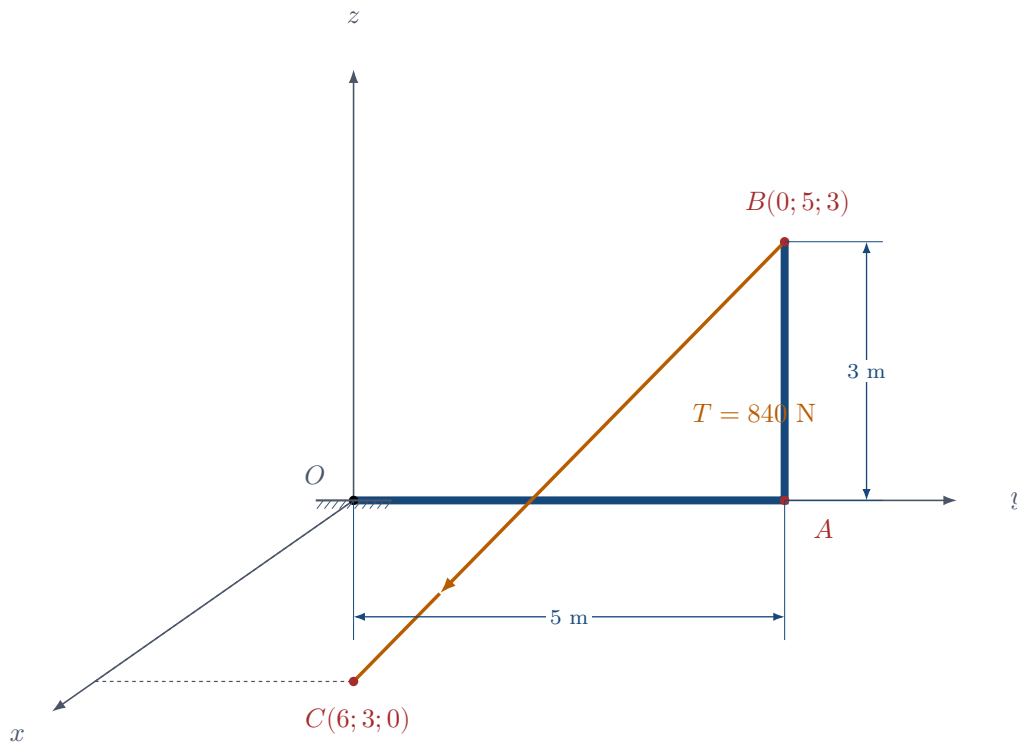
- (a) Determina la fuerza resultante que los dos cables ejercen sobre el poste en B .
- (b) Determina el momento de esa resultante respecto a la base O del poste.
- (c) Explica por qué la componente z del momento vale cero.



Problema 1.6 — Nivel parcial: tubo OAB con cable

El tubo OAB sale de O a lo largo del eje y hasta $A(0; 5; 0)$ m y luego sube hasta $B(0; 5; 3)$ m. En B se amarra un cable que llega al anclaje $C(6; 3; 0)$ m. La tensión del cable es de 840 N.

- (a) Escribe como vector la fuerza que el cable ejerce en B y determina sus ángulos directores.
- (b) Determina el momento que esa fuerza produce respecto a O .
- (c) Determina el momento respecto al eje OA .



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 1.1 — Ménsula en el plano

Ruta de solución

Todo pasa en el plano xy , así que el momento va a ser un solo número. Primero parto la fuerza en sus componentes usando el triángulo 5–12–13. Después escribo el vector que va de A hasta C (el punto donde está aplicada). Con $M_A = r_x F_y - r_y F_x$ sale el momento, y la distancia perpendicular sale de dividir ese momento entre la magnitud de la fuerza.

PASO 1 Parte la fuerza en componentes

El triángulo de pendiente tiene catetos 5 y 12, así que su hipotenusa vale $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. La fuerza apunta hacia la derecha y hacia abajo:

$$F_x = 260 \left(\frac{5}{13} \right) = 100 \text{ N} \quad F_y = -260 \left(\frac{12}{13} \right) = -240 \text{ N}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = 100 \hat{i} - 240 \hat{j} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Escribe el vector de posición de A a C

$$\vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow C} = 0,30 \hat{i} + 0,18 \hat{j} \quad [\text{m}]$$

La ménsula tiene dos tramos, pero el vector de posición no se dibuja siguiendo la barra: va *en línea recta* de A a C .

PASO 3 Aplica la fórmula del momento en 2D

$$M_A = r_x F_y - r_y F_x = (0,30)(-240) - (0,18)(100) = -72 - 18$$

$$M_A = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Lee el resultado con Varignon

Los dos sumandos son los momentos de las dos componentes por separado:

- $F_y = -240 \text{ N}$ actuando con brazo horizontal 0,30 m aporta $-72 \text{ N} \cdot \text{m}$: empuja el extremo hacia abajo, y eso gira la ménsula en sentido horario.
- $F_x = 100 \text{ N}$ actuando con brazo vertical 0,18 m aporta $-18 \text{ N} \cdot \text{m}$: empuja hacia la derecha por encima del pasador, y eso también gira en sentido horario.

Los dos empujan para el mismo lado, por eso se suman en vez de restarse.

PASO 5 Distancia perpendicular

$$d = \frac{|M_A|}{|\vec{\mathbf{F}}|} = \frac{90 \text{ N} \cdot \text{m}}{260 \text{ N}} = 0,3462 \text{ m}$$

Respuesta: $M_A = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$, es decir $90 \text{ N} \cdot \text{m}$ en sentido **horario**. La línea de acción de la fuerza pasa a $d = 0,3462 \text{ m} = 34,62 \text{ cm}$ del pasador A .

El brazo no es 0,30 m ni 0,18 m, y tampoco $|\vec{r}_{AC}|$

Mucha gente calcula $|\vec{r}_{A \rightarrow C}| = \sqrt{0,30^2 + 0,18^2} = 0,350 \text{ m}$ y multiplica $260 \times 0,350 = 91,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Se parece al resultado correcto, pero está mal: ese es el momento que habría si la fuerza fuera *perpendicular* a AC , y no lo es. El brazo verdadero es la distancia perpendicular a la *línea de acción*, que da 0,3462 m. El parecido entre 91,0 y 90,0 es pura casualidad de este problema, y por eso es tan traicionero.

Chequeo de sentido común

$d = 0,3462 \text{ m}$ tiene que ser menor o igual que $|\vec{r}_{A \rightarrow C}| = 0,350 \text{ m}$, porque la distancia perpendicular es la *más corta* entre el punto y la recta. Se cumple, y por poco: eso dice que la fuerza es casi perpendicular a AC . ✓

Problema 1.2 — Pluma sostenida por un cable

Ruta de solución

Primero armo la fuerza del cable con la receta del Taller 0: vector $B \rightarrow D$, unitario, por la tensión. Después tomo momentos respecto a O con $\vec{r}_{O \rightarrow B}$, que es el vector más cómodo porque B es justamente donde está aplicada la fuerza. Por último, la distancia perpendicular sale de $d = |\vec{M}_O|/|\vec{F}|$.

PASO 1 La fuerza del cable

$$\begin{aligned}\vec{r}_{B \rightarrow D} &= (2 - 0)\hat{i} + (10 - 4)\hat{j} + (0 - 3)\hat{k} = 2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} \text{ m} \\ |\vec{r}_{B \rightarrow D}| &= \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7 \text{ m} \quad \vec{T} = \frac{350}{7}(2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}) = 50(2\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}) \\ \vec{T} &= 100\hat{i} + 300\hat{j} - 150\hat{k} \quad [\text{N}]\end{aligned}$$

PASO 2 El vector de posición

$$\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m}$$

PASO 3 Producto cruz, componente por componente

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 100 & 300 & -150 \end{vmatrix}$$

$$M_x = (4)(-150) - (3)(300) = -600 - 900 = -1500$$

$$M_y = (3)(100) - (0)(-150) = 300 - 0 = 300$$

$$M_z = (0)(300) - (4)(100) = 0 - 400 = -400$$

$$\vec{M}_O = -1500\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Cómo no equivocarse con el signo del término $\hat{j}$

La componente $\hat{j}$ del producto cruz lleva signo cambiado en la regla del determinante. En vez de memorizarlo, usa esta versión ya despejada y aplícala siempre igual:

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y \quad M_y = r_z F_x - r_x F_z \quad M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

Fíjate en el patrón: los subíndices van rotando $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Escríbela en la hoja apenas empiece el parcial.

PASO 4 Magnitud y distancia perpendicular

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{1500^2 + 300^2 + 400^2} = \sqrt{2\,250\,000 + 90\,000 + 160\,000} = \sqrt{2\,500\,000} = 1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$d = \frac{1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}}{350 \text{ N}} = 4,5175 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{M}_O = -1500\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, con magnitud $1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}$, y la línea de acción del cable pasa a $4,5175 \text{ m}$ de la articulación O . La componente $M_z = -400 \text{ N} \cdot \text{m}$ dice que, además de doblar la pluma, el cable tiende a barrerla alrededor del eje vertical en sentido horario visto desde arriba.

Chequeo de sentido común

El momento tiene que ser **perpendicular** tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Compruébalo con dos productos punto que deben dar cero:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{T} = (-1500)(100) + (300)(300) + (-400)(-150) = -150\,000 + 90\,000 + 60\,000 = 0 \quad \checkmark$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{r}_{O \rightarrow B} = (-1500)(0) + (300)(4) + (-400)(3) = 0 + 1200 - 1200 = 0 \quad \checkmark$$

Esta es la mejor verificación que existe para un producto cruz: si alguno de los dos no da cero, hay un error aritmético seguro.

Problema 1.3 — Tubo acodado: momento respecto a un eje vertical**Ruta de solución**

La parte (a) es un producto cruz normal con $\vec{r}_{A \rightarrow C}$. Para la parte (b) no hay que volver a empezar: como el eje AB es el eje z , el momento respecto a ese eje es simplemente la componente $\hat{k}$ del momento que ya calculé. Al final interpreto el signo mirando el tubo desde arriba.

PASO 1 La fuerza del cable

$$\vec{r}_{C \rightarrow D} = (4 - 0)\hat{i} + (10 - 3)\hat{j} + (0 - 4)\hat{k} = 4\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k} \text{ m}$$

$$|\vec{r}_{C \rightarrow D}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = \sqrt{81} = 9 \text{ m} \quad \vec{T} = \frac{900}{9}(4\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k}) = 400\hat{i} + 700\hat{j} - 400\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Vector de posición y momento respecto a A

$$\vec{r}_{A \rightarrow C} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (3)(-400) - (4)(700) = -1200 - 2800 = -4000$$

$$M_y = (4)(400) - (0)(-400) = 1600 - 0 = 1600$$

$$M_z = (0)(700) - (3)(400) = 0 - 1200 = -1200$$

$$\vec{M}_A = -4000\hat{i} + 1600\hat{j} - 1200\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad |\vec{M}_A| = \sqrt{20\,000\,000} = 4472,14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 3 (b) Momento respecto al eje AB

El eje AB va de A(0;0;0) a B(0;0;4), o sea que su unitario es $\hat{\lambda}_{AB} = \hat{k}$. Entonces:

$$M_{AB} = \vec{M}_A \cdot \hat{k} = (-4000)(0) + (1600)(0) + (-1200)(1)$$

$$M_{AB} = -1200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Interpreta el signo

El signo negativo con $\hat{\lambda}_{AB} = +\hat{k}$ significa: pon el pulgar derecho apuntando hacia $+z$ (hacia arriba); los dedos indican el sentido positivo. Como el resultado es negativo, el giro real va al contrario: **mirando el tubo desde arriba, el cable trata de barrerlo en sentido horario.**

Verificación con un segundo punto del eje

El momento respecto a un eje no depende de qué punto del eje escojas. Repite con B: $\vec{r}_{B \rightarrow C} = 3\hat{j}$, y

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 400 & 700 & -400 \end{vmatrix} = -1200\hat{i} + 0\hat{j} - 1200\hat{k}$$

La componente $\hat{k}$ vuelve a ser $-1200 \text{ N} \cdot \text{m}$. Los momentos respecto a A y a B son distintos (lógico, son puntos distintos), pero su proyección sobre el eje es la misma.

Qué parte de la fuerza sí produce giro alrededor del eje vertical

Mira la cuenta de $M_z = r_x F_y - r_y F_x$. Como $r_x = 0$, solo sobrevive $-r_y F_x = -(3)(400)$. Es decir: de los 900 N del cable, lo único que hace girar el tubo alrededor de su eje vertical es la componente $F_x = 400 \text{ N}$ actuando con el brazo horizontal de 3 m. La componente $F_z = -400 \text{ N}$ es *paralela* al eje y no produce ningún giro alrededor de él; la componente $F_y = 700 \text{ N}$ apunta directo hacia el eje y tampoco. Reconocer esto de entrada te ahorra el producto cruz completo.

Chequeo de sentido común

Comprueba que el momento es perpendicular a la fuerza: $(-4000)(400) + (1600)(700) + (-1200)(-400) = -1\,600\,000 + 1\,120\,000 + 480\,000 = 0$. ✓

Problema 1.4 — Momento respecto a un eje oblicuo

Ruta de solución

Ahora el eje no es un eje coordenado, así que hay que proyectar de verdad. Tres piezas: la fuerza del cable ($\vec{\mathbf{F}}$), un vector de posición desde un punto del eje hasta un punto de la línea de acción ($\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow P}$), y el unitario del eje ($\hat{\lambda}_{OG}$). El momento respecto al eje es el producto mixto de esos tres.

PASO 1 Unitario del eje

$$\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow G} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow G}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \text{ m}$$

$$\hat{\lambda}_{OG} = \frac{1}{7} (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 0,2857\hat{i} + 0,4286\hat{j} + 0,8571\hat{k}$$

PASO 2 La fuerza del cable

$$\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow Q} = (3 - 1)\hat{i} + (0 - 6)\hat{j} + (3 - 0)\hat{k} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow Q}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7 \text{ m}$$

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{490}{7} (2\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}) = 140\hat{i} - 420\hat{j} + 210\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 3 Vector de posición desde el eje hasta la fuerza

Tomo O porque está sobre el eje, y P porque está sobre la línea de acción:

$$\vec{\mathbf{r}}_{O \rightarrow P} = 1\hat{i} + 6\hat{j} + 0\hat{k} \text{ m}$$

PASO 4 Momento respecto al punto O

$$M_x = (6)(210) - (0)(-420) = 1260$$

$$M_y = (0)(140) - (1)(210) = -210$$

$$M_z = (1)(-420) - (6)(140) = -420 - 840 = -1260$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O = 1260\hat{i} - 210\hat{j} - 1260\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 5 Proyecta sobre el eje

$$M_{OG} = \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \hat{\lambda}_{OG} = \frac{(1260)(2) + (-210)(3) + (-1260)(6)}{7} = \frac{2520 - 630 - 7560}{7} = \frac{-5670}{7}$$

$$M_{OG} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: $M_{OG} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$. La magnitud del giro alrededor de la flecha es $810 \text{ N} \cdot \text{m}$, y el signo negativo dice que gira en sentido **contrario** al que marca la regla de la mano derecha con el pulgar apuntando de O hacia G .

La misma cuenta como un solo determinante

Se puede hacer todo de una:

$$M_{OG} = \begin{vmatrix} 0,2857 & 0,4286 & 0,8571 \\ 1 & 6 & 0 \\ 140 & -420 & 210 \end{vmatrix} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Primera fila el unitario del eje, segunda el vector de posición, tercera la fuerza. Ese orden importa: cambiarlo te cambia el signo.

No proyectes la fuerza; proyecta el momento

El error más común es calcular $\vec{T} \cdot \hat{\lambda}_{OG}$ y llamarle momento. Eso da $(140)(2) + (-420)(3) + (210)(6)$ dividido en 7, o sea $0 \text{ N} \cdot \text{m}$, y ni siquiera tiene unidades de momento: son newtons. La fuerza se proyecta para hallar *fuerzas* a lo largo del eje; para el momento hay que hacer primero el producto cruz y proyectar *después*.

Chequeo de sentido común

$|M_{OG}| = 810 \text{ N} \cdot \text{m}$ tiene que ser menor o igual que $|\vec{M}_O|$, porque una proyección nunca supera al vector proyectado:

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{1260^2 + 210^2 + 1260^2} = \sqrt{1\,587\,600 + 44\,100 + 1\,587\,600} = 1794,24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y $810 \leq 1794,24$. ✓ La parte que “se perdió” es el momento que trata de doblar la flecha en vez de hacerla girar; eso lo aguantan los cojinetes.

Problema 1.5 — Poste con dos cables**Ruta de solución**

Armo las dos fuerzas por separado con la receta del Taller 0, las sumo para obtener la resultante, y tomo momentos respecto a O con $\vec{r}_{O \rightarrow B}$. Como las dos fuerzas están aplicadas en el mismo punto B , puedo sumarlas primero y hacer un solo producto cruz en vez de dos.

PASO 1 Las dos fuerzas

$$\begin{aligned} \vec{r}_{B \rightarrow A} &= 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k} \text{ m}, & |\vec{r}_{B \rightarrow A}| &= \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \text{ m} \\ \vec{F}_1 &= \frac{560}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 80(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 160\hat{i} + 240\hat{j} - 480\hat{k} \quad [\text{N}] \\ \vec{r}_{B \rightarrow C} &= 3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k} \text{ m}, & |\vec{r}_{B \rightarrow C}| &= \sqrt{9 + 4 + 36} = 7 \text{ m} \\ \vec{F}_2 &= \frac{490}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 70(3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 210\hat{i} - 140\hat{j} - 420\hat{k} \quad [\text{N}] \end{aligned}$$

PASO 2 (a) Resultante

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (160 + 210)\hat{i} + (240 - 140)\hat{j} + (-480 - 420)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 370\hat{i} + 100\hat{j} - 900\hat{k} \quad [\text{N}]} \quad |\vec{R}| = \sqrt{136\,900 + 10\,000 + 810\,000} = 978,2 \text{ N}$$

PASO 3 (b) Momento respecto a O

$$\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (0)(-900) - (6)(100) = -600$$

$$M_y = (6)(370) - (0)(-900) = 2220$$

$$M_z = (0)(100) - (0)(370) = 0$$

$$\boxed{\vec{M}_O = -600\hat{i} + 2220\hat{j} \text{ [N} \cdot \text{m]}} \quad |\vec{M}_O| = \sqrt{360\,000 + 4\,928\,400} = 2299,65 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 (c) Por qué $M_z = 0$

Los dos cables están amarrados en B , y B está *sobre* el eje z . El brazo de cualquier fuerza aplicada en B respecto al eje z es cero: la línea de acción corta el eje. Y una fuerza cuya línea de acción corta un eje no puede hacer girar nada alrededor de ese eje, igual que empujar una puerta exactamente en la bisagra no la abre.

Respuesta: $\vec{R} = 370\hat{i} + 100\hat{j} - 900\hat{k}$ N (978,2 N de magnitud) y $\vec{M}_O = -600\hat{i} + 2220\hat{j}$ N·m (2299,65 N·m). El momento no tiene componente z porque ambas fuerzas se aplican en un punto del propio eje del poste: lo doblan, pero no lo torsionan.

Sumar primero y multiplicar después

Como las dos fuerzas se aplican en el *mismo* punto, vale $\vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$. Un producto cruz en lugar de dos. Ojo: esto solo funciona si el punto de aplicación es el mismo; si estuvieran en puntos distintos habría que hacer los dos momentos por separado.

La resultante $\vec{R}$ no vale $560 + 490$

$|\vec{R}| = 978,2$ N, no 1050 N. Las magnitudes de fuerzas no se suman como números salvo que las fuerzas sean paralelas y del mismo sentido. Aquí los cables se abren hacia lados distintos, y parte de sus componentes horizontales se cancela.

Chequeo de sentido común

Recalcula el momento sumando los dos momentos por separado:

$$\vec{r} \times \vec{F}_1 = (0, 0, 6) \times (160, 240, -480) = -1440\hat{i} + 960\hat{j}$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_2 = (0, 0, 6) \times (210, -140, -420) = 840\hat{i} + 1260\hat{j}$$

Suma: $(-1440 + 840)\hat{i} + (960 + 1260)\hat{j} = -600\hat{i} + 2220\hat{j}$. ✓ Coincide con el paso 3.

Problema 1.6 — Nivel parcial: tubo OAB con cable

Ruta de solución

Este es literalmente el punto 1 de un parcial real. Tres partes encadenadas: (a) la fuerza del cable y sus ángulos directores, que es Taller 0 puro; (b) el momento respecto a O con $\vec{r}_{O \rightarrow B}$; y (c) la proyección de ese momento sobre el eje OA , que va a lo largo de y , así que basta tomar la componente $\hat{j}$.

PASO 1 (a) La fuerza del cable

$$\vec{r}_{B \rightarrow C} = (6 - 0)\hat{i} + (3 - 5)\hat{j} + (0 - 3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k} \text{ m}$$

$$|\vec{r}_{B \rightarrow C}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7 \text{ m} \quad \vec{T} = \frac{840}{7}(6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 120(6\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$\vec{T} = 720\hat{i} - 240\hat{j} - 360\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 Ángulos directores

$$\cos \theta_x = \frac{720}{840} = 0,8571 \quad \cos \theta_y = \frac{-240}{840} = -0,2857 \quad \cos \theta_z = \frac{-360}{840} = -0,4286$$

$$\theta_x = 31,00^\circ \quad \theta_y = 106,60^\circ \quad \theta_z = 115,38^\circ$$

Dos ángulos obtusos: el cable jala hacia $-y$ y hacia abajo, lo cual concuerda con la figura.

PASO 3 (b) Momento respecto a O

$$\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (5)(-360) - (3)(-240) = -1800 + 720 = -1080$$

$$M_y = (3)(720) - (0)(-360) = 2160 - 0 = 2160$$

$$M_z = (0)(-240) - (5)(720) = 0 - 3600 = -3600$$

$$\vec{M}_O = -1080\hat{i} + 2160\hat{j} - 3600\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{1\,166\,400 + 4\,665\,600 + 12\,960\,000} = \sqrt{18\,792\,000} = 4334,97 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 4 (c) Momento respecto al eje OA

El eje OA va de $O(0; 0; 0)$ a $A(0; 5; 0)$, así que $\hat{\lambda}_{OA} = \hat{j}$:

$$M_{OA} = \vec{M}_O \cdot \hat{j} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El atajo que vale oro en el parcial

Para la parte (c) no hacía falta el producto cruz completo. Como A también está sobre el eje, se puede usar $\vec{r}_{A \rightarrow B} = 3\hat{k}$, que tiene dos ceros:

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 720 & -240 & -360 \end{vmatrix} = 720\hat{i} + 2160\hat{j} + 0\hat{k}$$

y su componente $\hat{j}$ es $2160 \text{ N} \cdot \text{m}$, el mismo resultado. Dos multiplicaciones en vez de nueve. Esta es la aplicación concreta del truco de la página 1: *escoge el vector de posición con más ceros*.

Respuesta: $\vec{T} = 720\hat{i} - 240\hat{j} - 360\hat{k} \text{ N}$, con $\theta_x = 31,00^\circ$, $\theta_y = 106,60^\circ$ y $\theta_z = 115,38^\circ$; $\vec{M}_O = -1080\hat{i} + 2160\hat{j} - 3600\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, de magnitud $4334,97 \text{ N} \cdot \text{m}$; y $M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$, positivo, o sea que el cable hace girar el tubo alrededor del tramo OA en el sentido que da la mano derecha con el pulgar hacia $+y$.

M_{OA} no es $|\vec{M}_O|$, ni se parece

$|\vec{M}_O| = 4334,97 \text{ N} \cdot \text{m}$ pero $M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$: menos de la mitad. El resto del momento ($-1080\hat{i}$ y $-3600\hat{k}$) no hace girar el tubo alrededor de OA ; lo *dobla* en el empotramiento. Son efectos físicos distintos y el parcial los pregunta por separado. Si entregas la magnitud total cuando te piden el momento respecto a un eje, el punto se pierde completo.

Chequeo de sentido común

Tres verificaciones rápidas:

1. $|\vec{T}| = \sqrt{720^2 + 240^2 + 360^2} = \sqrt{518\,400 + 57\,600 + 129\,600} = \sqrt{705\,600} = 840 \text{ N}$. ✓
2. $\vec{M}_O \cdot \vec{T} = (-1080)(720) + (2160)(-240) + (-3600)(-360) = -777\,600 - 518\,400 + 1\,296\,000 = 0$. ✓
3. Los dos caminos para M_{OA} (usando O y usando A) dieron $2160 \text{ N} \cdot \text{m}$. ✓

Y la distancia perpendicular de O a la línea del cable: $d = 4334,97/840 = 5,161 \text{ m}$, un valor razonable para un tubo que mide 5 m de largo y 3 m de alto.

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 1

1.1	$M_A = -90 \text{ N} \cdot \text{m}$ (horario); $d = 0,3462 \text{ m}$
1.2	$\vec{T} = 100\hat{i} + 300\hat{j} - 150\hat{k} \text{ N}$; $\vec{M}_O = -1500\hat{i} + 300\hat{j} - 400\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$; $ \vec{M}_O = 1581,14 \text{ N} \cdot \text{m}$; $d = 4,5175 \text{ m}$
1.3	$\vec{T} = 400\hat{i} + 700\hat{j} - 400\hat{k} \text{ N}$; $\vec{M}_A = -4000\hat{i} + 1600\hat{j} - 1200\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_{AB} = -1200 \text{ N} \cdot \text{m}$ (horario visto desde arriba)
1.4	$\vec{T} = 140\hat{i} - 420\hat{j} + 210\hat{k} \text{ N}$; $\vec{M}_O = 1260\hat{i} - 210\hat{j} - 1260\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_{OG} = -810 \text{ N} \cdot \text{m}$
1.5	$\vec{R} = 370\hat{i} + 100\hat{j} - 900\hat{k} \text{ N}$ (978,2 N); $\vec{M}_O = -600\hat{i} + 2220\hat{j} \text{ N} \cdot \text{m}$ (2299,65 N · m); $M_z = 0$ porque las dos fuerzas se aplican sobre el propio eje z
1.6	$\vec{T} = 720\hat{i} - 240\hat{j} - 360\hat{k} \text{ N}$; $\theta_x = 31,00^\circ$, $\theta_y = 106,60^\circ$, $\theta_z = 115,38^\circ$; $\vec{M}_O = -1080\hat{i} + 2160\hat{j} - 3600\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ (4334,97 N · m); $M_{OA} = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$

Lo que tiene que quedarte de este taller

1. $\vec{r}$ va **desde** el punto de momentos **hasta** cualquier punto de la línea de acción. Escoge el que tenga más ceros.
2. Momento respecto a un punto: vector. Respecto a un eje: número con signo.
3. Un momento siempre es perpendicular a su fuerza: úsalo como chequeo, cuesta diez segundos.
4. Fuerza paralela al eje, o que lo corta, no aporta momento respecto a ese eje.