

TALLER 2

Par de fuerzas, traslado de una fuerza y sistema fuerza-par

Semana del programa: Semana 2, clase 2 y Semana 3, clase 1 • Tiempo sugerido: 4 horas

1. Lo que necesitas de este tema

El par: la fuerza que no empuja, solo gira

Un **par** (o cupla) son dos fuerzas de igual magnitud, direcciones paralelas y sentidos opuestos. Al sumarlas vectorialmente da cero: un par **no empuja el cuerpo en ninguna dirección**. Lo único que hace es girarlo.

Es lo que pasa cuando giras el volante con las dos manos: una sube, la otra baja, el carro no se mueve de lado, pero el volante gira.

$$\vec{M} = \vec{r}_{B \rightarrow A} \times \vec{F}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza aplicada en A , $-\vec{F}$ la aplicada en B , y $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ el vector que va de una a la otra.

La propiedad que hace especial al par

El momento de un par **no depende del punto** respecto al cual lo calcules. Da lo mismo tomarlo en A , en B , en el origen o en la esquina del salón: siempre el mismo vector. Por eso un par es un *vector libre*: puedes dibujarlo en cualquier parte del cuerpo sin cambiar nada. En magnitud, si d es la distancia perpendicular entre las dos líneas de acción:

$$M = F d$$

Trasladar una fuerza: el sistema fuerza-par

Una fuerza **no** se puede mover de su línea de acción sin más. Pero sí se puede trasladar a cualquier punto si se le agrega un par que compense el cambio:

$$\vec{F} \text{ en } A \equiv \vec{F} \text{ en } B + \vec{M}_B = \vec{r}_{B \rightarrow A} \times \vec{F}$$

Este es el motor de todo el resto del curso: es lo que permite reemplazar un montón de fuerzas regadas por una sola fuerza y un solo par aplicados donde a ti te convenga.

Y al revés: de fuerza-par a una sola fuerza

Si en un punto O tienes $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{M}}_O$ y además $\vec{\mathbf{R}} \perp \vec{\mathbf{M}}_O$ (en 2D siempre ocurre), el sistema se reduce a **una sola fuerza** $\vec{\mathbf{R}}$ aplicada sobre otra línea de acción. Esa línea se encuentra pidiendo que la fuerza sola reproduzca el momento:

$$x R_y - y R_x = M_O$$

Cada punto (x, y) que cumpla esa ecuación está sobre la nueva línea de acción.

La regla de los tres pasos para trasladar

1. La fuerza **no cambia**: misma magnitud, misma dirección, mismo sentido.
2. El par que aparece es $\vec{\mathbf{r}}_{\text{nuevo} \rightarrow \text{viejo}} \times \vec{\mathbf{F}}$.
3. Si trasladas a un punto que ya está sobre la línea de acción, el par sale cero (porque $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ quedan paralelos).

Par y momento no son sinónimos

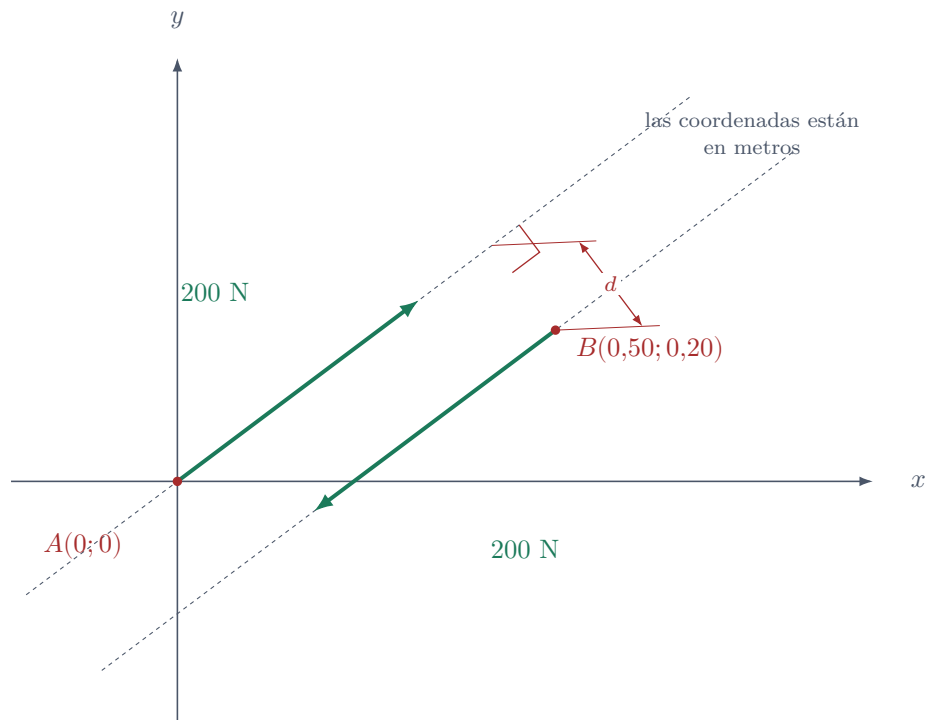
Todo par produce un momento, pero no todo momento viene de un par. El momento de *una* fuerza depende del punto que escojas; el momento de un *par* no. Cuando el enunciado dice “un par de $24 \text{ N} \cdot \text{m}$ ” te está dando un vector libre; cuando dice “el momento de la fuerza respecto a A ” te está pidiendo una cuenta que cambia si cambias el punto.

PARTE A — Enunciados

Problema 2.1 — Un par en el plano

Dos fuerzas de 200 N forman un par: una actúa en $A(0; 0)$ con dirección $(\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ y la otra en $B(0,50; 0,20)$ m con la dirección opuesta.

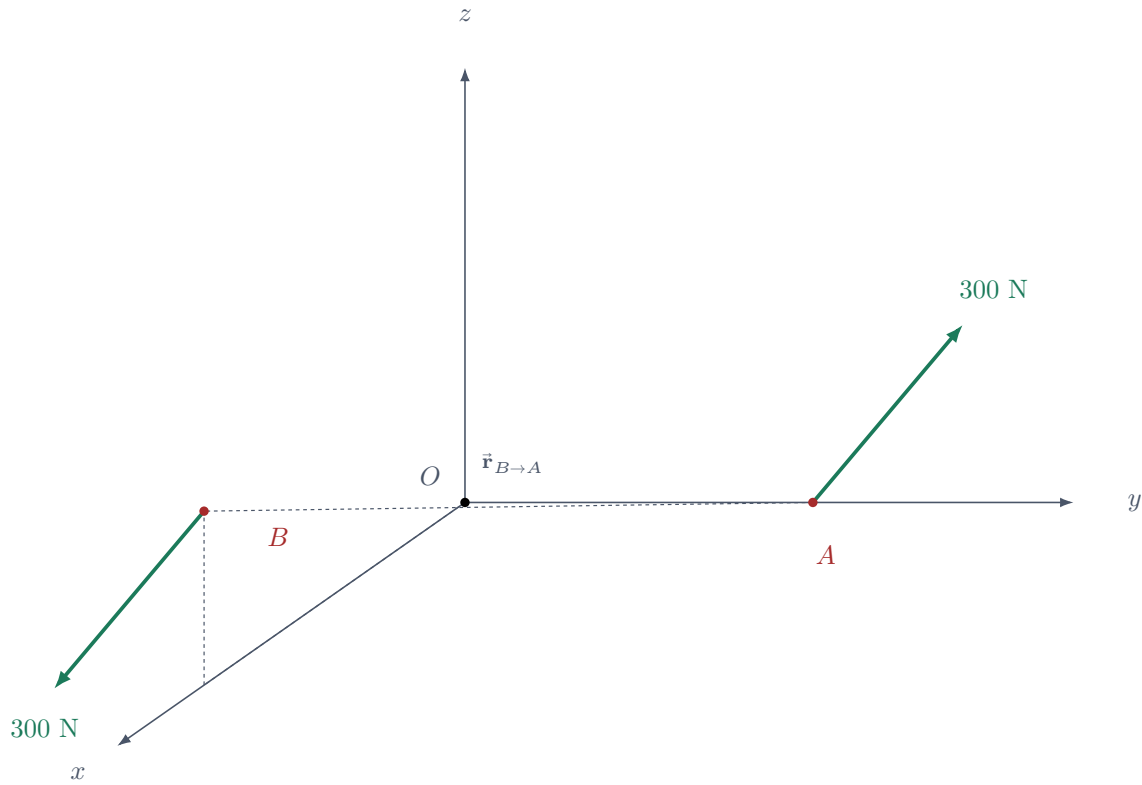
- Calcula el momento del par tomando momentos respecto a A , y luego repite tomándolos respecto al punto $P(1; 1)$ m. Compara.
- Determina la distancia perpendicular entre las dos líneas de acción.



Problema 2.2 — Un par en el espacio

Dos fuerzas de 300 N forman un par: una actúa en $A(0; 0,40; 0)$ m con la dirección del unitario $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ y la otra en $B(0,60; 0; 0,20)$ m con la dirección opuesta.

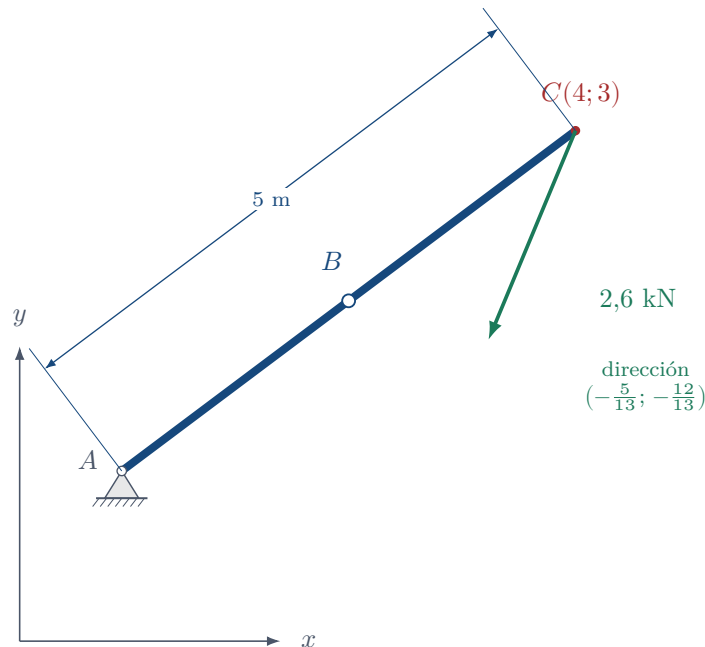
- (a) Determina el momento del par como vector.
- (b) Determina la distancia perpendicular entre las dos líneas de acción.



Problema 2.3 — Trasladar la fuerza de un cable

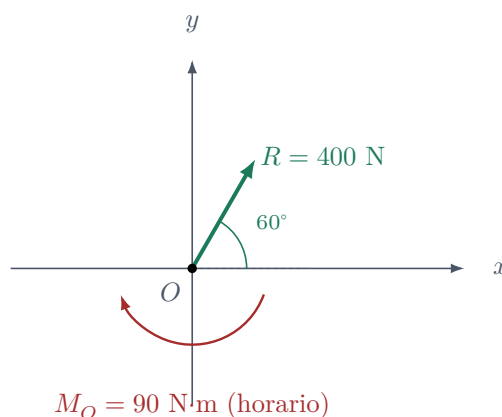
La pluma AC está articulada en $A(0; 0)$ y su extremo está en $C(4; 3)$ m. Un cable jala en C con una fuerza de 2,6 kN en la dirección $(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13})$.

Reemplaza esa fuerza por un sistema fuerza-par equivalente aplicado (a) en A y (b) en el punto medio $B(2; 1,5)$ m. Compara los dos pares.

**Problema 2.4 — De sistema fuerza-par a una sola fuerza**

En el origen O actúa un sistema fuerza-par formado por una fuerza $\vec{R}$ de 400 N inclinada 60° sobre la horizontal y un par de $90 \text{ N} \cdot \text{m}$ en sentido horario.

Reemplaza el sistema por **una sola fuerza** equivalente: determina los puntos donde su línea de acción corta el eje x y el eje y .

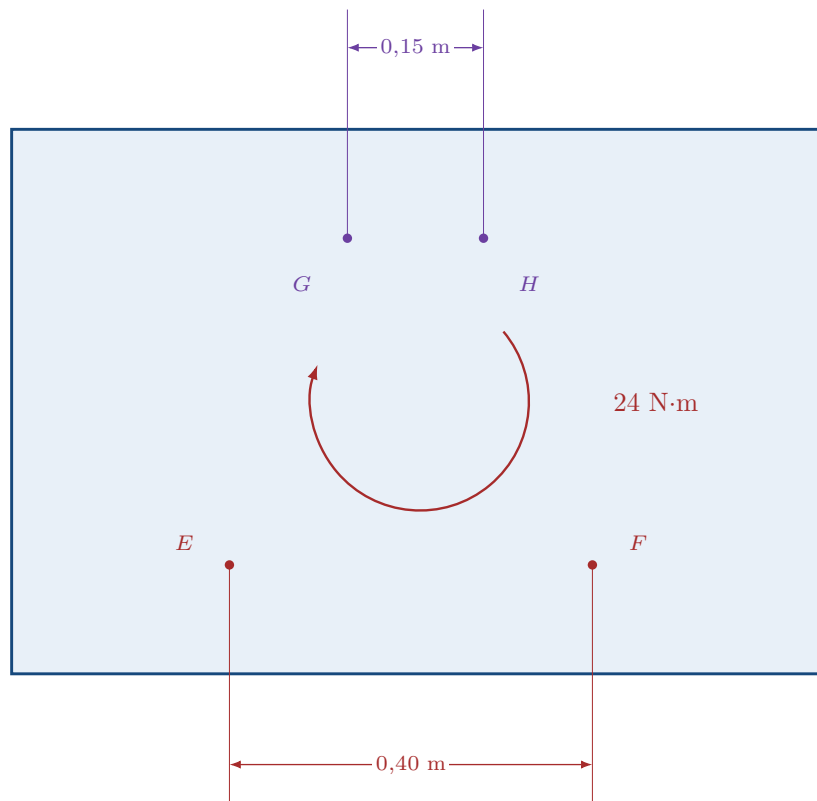


Problema 2.5 — Reemplazar un par por otro equivalente

Sobre la placa actúa un par de $24 \text{ N} \cdot \text{m}$ en sentido horario. Se quiere reemplazar por dos fuerzas verticales iguales y opuestas aplicadas:

- (a) en E y F , separados $0,40 \text{ m}$;
- (b) en G y H , separados $0,15 \text{ m}$.

Determina la magnitud de las fuerzas en cada caso y explica por qué el resultado tiene sentido físico.

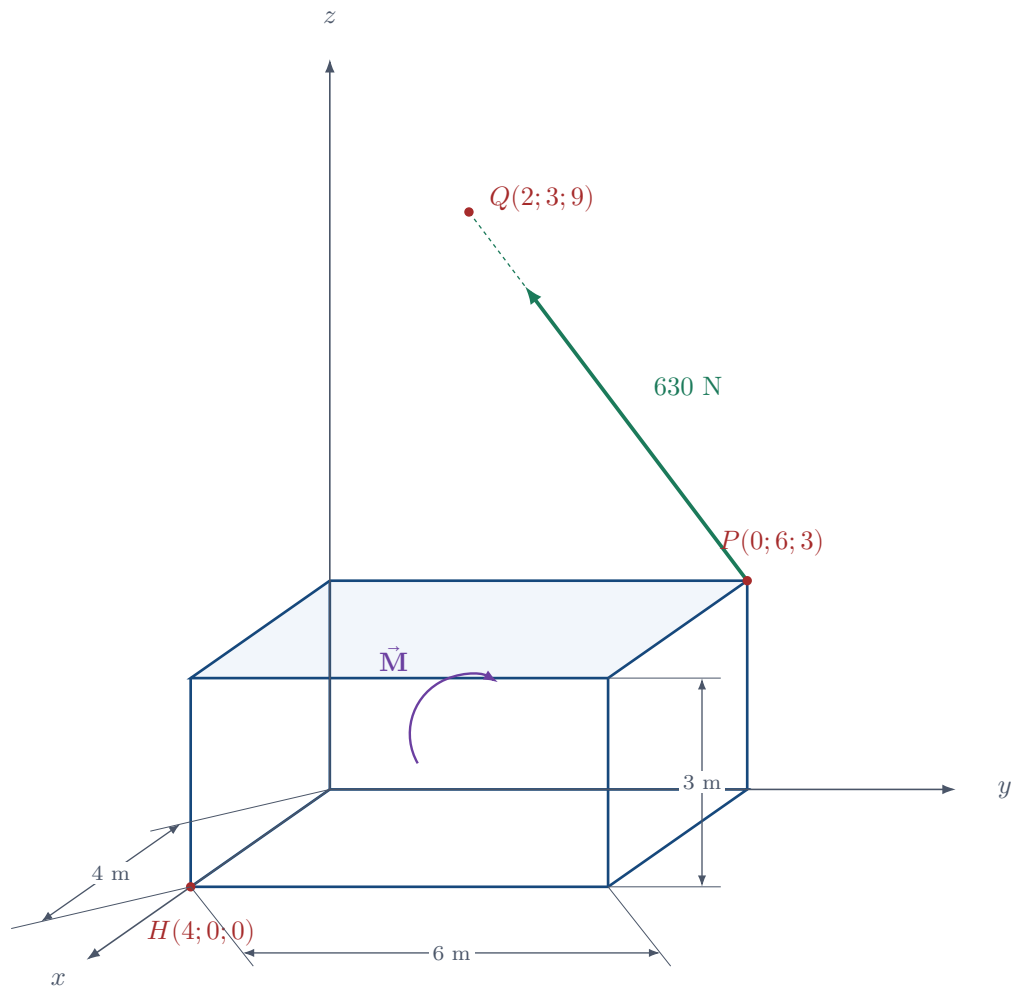


Problema 2.6 — Nivel parcial: bloque con fuerza y par

Sobre el bloque de la figura ($4\text{ m} \times 6\text{ m} \times 3\text{ m}$) actúan dos cosas:

- una fuerza de 630 N aplicada en la esquina $P(0; 6; 3)\text{ m}$, dirigida hacia el punto $Q(2; 3; 9)\text{ m}$;
- un par de momento $\vec{M} = 150\hat{j} - 200\hat{k}\text{ N}\cdot\text{m}$.

Reemplaza el sistema por un sistema fuerza-par equivalente aplicado en la esquina $H(4; 0; 0)\text{ m}$.



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 2.1 — Un par en el plano

Ruta de solución

Voy a hacer a propósito la cuenta dos veces, desde dos puntos distintos, para ver con mis propios números que el resultado no cambia. En cada caso sumo los momentos de las dos fuerzas. Al final saco la distancia entre las líneas con $d = M/F$.

PASO 1 Escribe las dos fuerzas en componentes

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} &= 200 \left(\frac{4}{5} \hat{i} + \frac{3}{5} \hat{j} \right) = 160 \hat{i} + 120 \hat{j} \quad [\text{N}] \quad (\text{en } A) \\ -\vec{\mathbf{F}} &= -160 \hat{i} - 120 \hat{j} \quad [\text{N}] \quad (\text{en } B)\end{aligned}$$

Suma de fuerzas: $\vec{\mathbf{F}} + (-\vec{\mathbf{F}}) = \vec{\mathbf{0}}$. Confirmado: un par no empuja.

PASO 2 Momentos tomados respecto a A

La fuerza aplicada en A tiene brazo cero respecto a A, así que solo aporta la de B:

$$M_A = \underbrace{0}_{\text{fuerza en A}} + [(0,50)(-120) - (0,20)(-160)] = -60 + 32 = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 3 Momentos tomados respecto a P(1; 1)

Ahora ninguna de las dos tiene brazo cero. Los vectores de posición son $\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow A} = (-1; -1)$ y $\vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow B} = (-0,50; -0,80)$:

$$\begin{aligned}M_P &= [(-1)(120) - (-1)(160)] + [(-0,50)(-120) - (-0,80)(-160)] \\ &= (-120 + 160) + (60 - 128) = 40 - 68 = -28 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Respuesta: $M_A = M_P = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$. **Exactamente el mismo número**, aunque los sumandos intermedios fueran completamente distintos (0 y -28 en un caso; +40 y -68 en el otro). Esa es la propiedad que define al par.

PASO 4 Distancia perpendicular entre las líneas de acción

$$d = \frac{|M|}{F} = \frac{28 \text{ N} \cdot \text{m}}{200 \text{ N}} = 0,14 \text{ m}$$

La cuenta corta que deberías usar en el parcial

No hace falta sumar dos momentos. Como las dos fuerzas son iguales y opuestas, basta con

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}}_{B \rightarrow A} \times \vec{\mathbf{F}}$$

con $\vec{\mathbf{r}}_{B \rightarrow A} = (-0,50; -0,20)$ y $\vec{\mathbf{F}} = (160; 120)$:

$$M = (-0,50)(120) - (-0,20)(160) = -60 + 32 = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Una línea en vez de cuatro.

El vector $\vec{r}$ va de la fuerza negativa a la positiva

Si escribes $\vec{r}_{A \rightarrow B}$ en vez de $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ te sale $+28 \text{ N} \cdot \text{m}$: la magnitud correcta pero el giro al revés. La regla segura: $\vec{r}$ sale del punto donde actúa $-\vec{F}$ y llega al punto donde actúa $+\vec{F}$. Y si dudas, haz la cuenta larga de los dos momentos por separado: ahí no hay ambigüedad posible.

Chequeo de sentido común

La distancia $d = 0,14 \text{ m}$ tiene que ser menor que la separación entre los puntos A y B , que vale $\sqrt{0,50^2 + 0,20^2} = 0,539 \text{ m}$. Se cumple. ✓ Y el signo negativo dice giro horario: mira la figura, la flecha de arriba empuja hacia la derecha-arriba y la de abajo hacia la izquierda-abajo; eso efectivamente gira el conjunto en sentido horario.

Problema 2.2 — Un par en el espacio**Ruta de solución**

Mismo concepto que el 2.1, pero ahora el momento es un vector de tres componentes. Armo $\vec{F}$ multiplicando la magnitud por el unitario que me dan, armo $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ restando coordenadas, hago el producto cruz una sola vez, y de la magnitud saco la distancia.

PASO 1 La fuerza

$$\vec{F} = 300 \left(\frac{2}{3} \hat{i} - \frac{1}{3} \hat{j} + \frac{2}{3} \hat{k} \right) = 200 \hat{i} - 100 \hat{j} + 200 \hat{k} \quad [\text{N}]$$

Chequeo inmediato: $\sqrt{200^2 + 100^2 + 200^2} = \sqrt{90\,000} = 300 \text{ N}$. ✓

PASO 2 El vector que une los dos puntos de aplicación

$$\vec{r}_{B \rightarrow A} = (0 - 0,60) \hat{i} + (0,40 - 0) \hat{j} + (0 - 0,20) \hat{k} = -0,60 \hat{i} + 0,40 \hat{j} - 0,20 \hat{k} \text{ m}$$

PASO 3 Producto cruz

$$M_x = (0,40)(200) - (-0,20)(-100) = 80 - 20 = 60$$

$$M_y = (-0,20)(200) - (-0,60)(200) = -40 + 120 = 80$$

$$M_z = (-0,60)(-100) - (0,40)(200) = 60 - 80 = -20$$

$$\vec{M} = 60 \hat{i} + 80 \hat{j} - 20 \hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 Magnitud y distancia entre las líneas

$$|\vec{M}| = \sqrt{60^2 + 80^2 + 20^2} = \sqrt{3600 + 6400 + 400} = \sqrt{10\,400} = 101,98 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$d = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{F}|} = \frac{101,98}{300} = 0,340 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{M} = 60 \hat{i} + 80 \hat{j} - 20 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, de magnitud $101,98 \text{ N} \cdot \text{m}$, y las dos líneas de acción están separadas $0,340 \text{ m}$. Ese vector momento es el eje alrededor del cual el par trata de girar el cuerpo: apunta sobre todo hacia $+y$, así que el giro es principalmente alrededor del eje y .

El par es un vector libre, pero el cálculo no es libre de puntos

Aunque el resultado no dependa del punto de momentos, sí depende de **cuáles** son los dos puntos de aplicación. $\vec{r}_{B \rightarrow A}$ tiene que unir las dos líneas de acción. Si por error usas el vector de posición de A desde el origen ($\vec{r}_{O \rightarrow A}$), estás calculando otra cosa completamente distinta.

Chequeo de sentido común

$\vec{M} \cdot \vec{F} = (60)(200) + (80)(-100) + (-20)(200) = 12\,000 - 8\,000 - 4\,000 = 0$. ✓ El momento de un par también es perpendicular a sus fuerzas.

Problema 2.3 — Trasladar la fuerza de un cable**Ruta de solución**

Trasladar una fuerza tiene una sola regla: la fuerza se copia idéntica al punto nuevo, y aparece un par igual al momento que la fuerza producía respecto a ese punto. Así que hago la misma cuenta dos veces, cambiando solo el vector de posición: una vez desde A y otra desde B .

PASO 1 La fuerza en componentes

$$\vec{F} = 2,6 \left(-\frac{5}{13} \hat{i} - \frac{12}{13} \hat{j} \right) = -1,0 \hat{i} - 2,4 \hat{j} \quad [\text{kN}]$$

PASO 2 (a) Sistema equivalente en A

La fuerza que va en A es la misma: $\vec{R} = -1,0 \hat{i} - 2,4 \hat{j}$ kN. El par que hay que agregar es el momento de la fuerza original respecto a A , con $\vec{r}_{A \rightarrow C} = (4; 3)$ m:

$$M_A = (4)(-2,4) - (3)(-1,0) = -9,6 + 3,0 = -6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PASO 3 (b) Sistema equivalente en B

Ahora $\vec{r}_{B \rightarrow C} = (2; 1,5)$ m:

$$M_B = (2)(-2,4) - (1,5)(-1,0) = -4,8 + 1,5 = -3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PASO 4 Compara

La **fuerza es la misma** en los dos sistemas; lo único que cambia es el par: $-6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en A y $-3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ en B , exactamente la mitad. Tiene sentido: B es el punto medio de AC , así que está a la mitad de la distancia perpendicular de la línea de acción, y el par vale $F \cdot d$.

Respuesta: En A : $\vec{R} = -1,0 \hat{i} - 2,4 \hat{j}$ kN más un par de $6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ horario. En B : la misma $\vec{R}$ más un par de $3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ horario. Los dos sistemas, y la fuerza original sola aplicada en C , producen exactamente el mismo efecto sobre la pluma.

Dónde el par se vuelve cero

Si trasladas la fuerza a cualquier punto que ya esté sobre su línea de acción, el par sale cero: $\vec{r}$ y $\vec{F}$ quedan paralelos y su producto cruz se anula. Por eso una fuerza *sí* se puede deslizar libremente a lo largo de su propia línea de acción (principio de transmisibilidad), pero no se puede sacar de ella sin pagar el peaje del par.

La fuerza no se “reparte” al trasladarla

Un error frecuente es pensar que al mover la fuerza de C a A hay que reducirla. No: $\vec{\mathbf{R}}$ conserva magnitud, dirección y sentido. Lo que aparece *además* es el par. Si escribes una fuerza distinta en A , el sistema ya no es equivalente.

Chequeo de sentido común

Verifica que los dos sistemas dan el mismo momento respecto a un tercer punto, por ejemplo el origen (que coincide con A): desde B , el momento total vale $M_B + \vec{\mathbf{r}}_{A \rightarrow B} \times \vec{\mathbf{R}} = -3,3 + [(2)(-2,4) - (1,5)(-1,0)] = -3,3 - 3,3 = -6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, igual que M_A . ✓

Problema 2.4 — De sistema fuerza-par a una sola fuerza**Ruta de solución**

Es el problema 2.3 leído al revés. Si una fuerza aplicada fuera del origen equivale a la misma fuerza en el origen más un par, entonces una fuerza en el origen más un par equivale a esa misma fuerza aplicada sobre *otra* línea. Escribo la condición de que la fuerza sola reproduzca el par y despejo dónde corta cada eje.

PASO 1 Componentes de la resultante

$$R_x = 400 \cos 60^\circ = 200 \text{ N} \quad R_y = 400 \sin 60^\circ = 346,41 \text{ N}$$

PASO 2 Plantea la condición de equivalencia

Si la fuerza sola actúa en un punto $(x; y)$, su momento respecto a O tiene que valer lo mismo que el par que estamos eliminando:

$$x R_y - y R_x = M_O \quad \Rightarrow \quad 346,41 x - 200 y = -90$$

Esa es la ecuación de la nueva línea de acción.

PASO 3 Corte con el eje x (hacemos $y = 0$)

$$346,41 x = -90 \quad \Rightarrow \quad x = -0,2598 \text{ m}$$

PASO 4 Corte con el eje y (hacemos $x = 0$)

$$-200 y = -90 \quad \Rightarrow \quad y = 0,45 \text{ m}$$

Respuesta: La fuerza única equivalente es la misma $\vec{\mathbf{R}} = 200\hat{i} + 346,41\hat{j} \text{ N}$ (400 N a 60°), pero aplicada sobre una línea que corta el eje x en $x = -0,2598 \text{ m}$ y el eje y en $y = 0,45 \text{ m}$. El signo negativo en x dice que la línea se corrió hacia la izquierda del origen, que es justo lo necesario para que una fuerza que apunta arriba-derecha produzca un giro *horario* alrededor de O .

Chequeo de sentido común

Dos comprobaciones:

1. La pendiente de la línea que pasa por $(-0,2598; 0)$ y $(0; 0,45)$ vale $\frac{0,45}{0,2598} = 1,7321 = \tan 60^\circ$. ✓ La nueva línea es paralela a $\vec{R}$, como tiene que ser.
2. Distancia de O a la nueva línea: $d = \frac{|M_O|}{|\vec{R}|} = \frac{90}{400} = 0,225$ m, menor que los 0,2598 m y que los 0,45 m de los cortes, como debe ser una perpendicular frente a dos oblicuas. ✓

Cuándo NO se puede reducir a una sola fuerza

Esta reducción funciona porque en el plano $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$ son siempre perpendiculares (la fuerza está en el plano, el momento sale del plano). En el espacio eso puede fallar: si $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$ el sistema *no* se reduce a una sola fuerza y hay que usar el torsor. Ese es exactamente el tema del Taller 3.

Problema 2.5 — Reemplazar un par por otro equivalente

Ruta de solución

Dos pares son equivalentes si tienen el mismo vector momento, sin importar con qué fuerzas ni a qué distancia se hagan. Como el momento vale $M = Fd$, si me fijan d solo queda despejar F .

PASO 1 La relación que gobierna todo

$$M = Fd \quad \Rightarrow \quad F = \frac{M}{d}$$

PASO 2 (a) Fuerzas en E y F , separadas 0,40 m

$$F = \frac{24 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,40 \text{ m}} = 60 \text{ N}$$

PASO 3 (b) Fuerzas en G y H , separadas 0,15 m

$$F = \frac{24 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,15 \text{ m}} = 160 \text{ N}$$

PASO 4 Sentido de las fuerzas

En los dos casos el par original es **horario**, así que en cada pareja la fuerza de la izquierda debe apuntar hacia abajo y la de la derecha hacia arriba (o al revés, según cómo estén ubicadas): lo que importa es que el giro resultante sea horario.

Respuesta: $F = 60$ N en E y F ; $F = 160$ N en G y H . Los tres pares —el original de $24 \text{ N} \cdot \text{m}$ y los dos reemplazos— producen exactamente el mismo efecto sobre la placa.

La relación es inversa, y eso se siente en la vida real

Menos distancia obliga a más fuerza. Es la misma razón por la que aflojar una tuerca con una llave corta cuesta mucho más que con una llave larga: el momento que necesitas es el mismo, y si acortas el brazo tienes que compensar con fuerza. Aquí, reducir la separación de 0,40 a 0,15 m (a poco más de un tercio) casi triplica la fuerza necesaria.

Chequeo de sentido común

Multiplica de vuelta: $60 \times 0,40 = 24 \text{ N} \cdot \text{m}$ ✓ y $160 \times 0,15 = 24 \text{ N} \cdot \text{m}$ ✓. Los dos reproducen el par original.

Problema 2.6 — Nivel parcial: bloque con fuerza y par**Ruta de solución**

Hay dos cosas que trasladar, y cada una se comporta distinto. La **fuerza** se copia a H y genera un par nuevo igual a $\vec{r}_{H \rightarrow P} \times \vec{F}$. El **par** que ya existía es un vector libre: se copia tal cual, sin generar nada. Al final sumo los dos momentos.

PASO 1 La fuerza en componentes

$$\vec{r}_{P \rightarrow Q} = (2 - 0)\hat{i} + (3 - 6)\hat{j} + (9 - 3)\hat{k} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k} \text{ m} \quad |\vec{r}_{P \rightarrow Q}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \text{ m}$$

$$\vec{F} = \frac{630}{7}(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 90(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k} \quad [\text{N}]$$

PASO 2 La fuerza resultante del sistema equivalente

Trasladar no cambia la fuerza, y el par no aporta fuerza ninguna:

$$\boxed{\vec{R} = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k} \quad [\text{N}]} \quad |\vec{R}| = 630 \text{ N}$$

PASO 3 El par que genera el traslado de la fuerza

$$\vec{r}_{H \rightarrow P} = (0 - 4)\hat{i} + (6 - 0)\hat{j} + (3 - 0)\hat{k} = -4\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k} \text{ m}$$

$$M_x = (6)(540) - (3)(-270) = 3240 + 810 = 4050$$

$$M_y = (3)(180) - (-4)(540) = 540 + 2160 = 2700$$

$$M_z = (-4)(-270) - (6)(180) = 1080 - 1080 = 0$$

$$\vec{r}_{H \rightarrow P} \times \vec{F} = 4050\hat{i} + 2700\hat{j} + 0\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 4 Suma el par que ya existía

El par $\vec{M} = 150\hat{j} - 200\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ es un vector libre: entra directo a la suma, sin producto cruz y sin depender de dónde esté aplicado.

$$\vec{M}_H = (4050\hat{i} + 2700\hat{j} + 0\hat{k}) + (0\hat{i} + 150\hat{j} - 200\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{M}_H = 4050\hat{i} + 2850\hat{j} - 200\hat{k} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]}$$

$$|\vec{\mathbf{M}}_H| = \sqrt{4050^2 + 2850^2 + 200^2} = \sqrt{24\,565\,000} = 4956,31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Respuesta: El sistema equivalente en H es $\vec{\mathbf{R}} = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k}$ N junto con $\vec{\mathbf{M}}_H = 4050\hat{i} + 2850\hat{j} - 200\hat{k}$ N·m (magnitud 4956,31 N·m). Desde el punto de vista del bloque, esto produce exactamente el mismo efecto que la fuerza de 630 N en P más el par original.

El par no se traslada: se copia

Este es el error específico de este tipo de problema. Mucha gente calcula $\vec{\mathbf{r}}_{H \rightarrow P} \times \vec{\mathbf{M}}$ o intenta “mover” el par. No hay nada que mover: un par es un vector libre, su momento es el mismo en todo punto del cuerpo, y por eso pasa a la suma final sin modificarse. Solo la **fuerza** genera un par nuevo al cambiar de punto de aplicación.

Chequeo de sentido común

Haz el camino de vuelta: traslada el sistema de H otra vez a P . Debería aparecer solo el par original.

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \vec{\mathbf{M}}_H + \vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow H} \times \vec{\mathbf{R}} \quad \text{con} \quad \vec{\mathbf{r}}_{P \rightarrow H} = 4\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$M_x = (-6)(540) - (-3)(-270) = -3240 - 810 = -4050$$

$$M_y = (-3)(180) - (4)(540) = -540 - 2160 = -2700$$

$$M_z = (4)(-270) - (-6)(180) = -1080 + 1080 = 0$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P = (4050 - 4050)\hat{i} + (2850 - 2700)\hat{j} + (-200 + 0)\hat{k} = 150\hat{j} - 200\hat{k}$$

Exactamente el par original. ✓ Si esta ida y vuelta no cierra, hay un error de signo en alguna parte.

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 2

2.1	$M_A = M_P = -28 \text{ N} \cdot \text{m}$ (horario); $d = 0,14 \text{ m}$
2.2	$\vec{\mathbf{F}} = 200\hat{i} - 100\hat{j} + 200\hat{k} \text{ N}$; $\vec{\mathbf{M}} = 60\hat{i} + 80\hat{j} - 20\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$, $ \vec{\mathbf{M}} = 101,98 \text{ N} \cdot \text{m}$; $d = 0,340 \text{ m}$
2.3	$\vec{\mathbf{R}} = -1,0\hat{i} - 2,4\hat{j} \text{ kN}$ en los dos casos; $M_A = -6,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $M_B = -3,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$
2.4	$\vec{\mathbf{R}} = 200\hat{i} + 346,41\hat{j} \text{ N}$; corta el eje x en $-0,2598 \text{ m}$ y el eje y en $0,45 \text{ m}$; $d = 0,225 \text{ m}$ del origen
2.5	(a) $F = 60 \text{ N}$; (b) $F = 160 \text{ N}$
2.6	$\vec{\mathbf{R}} = 180\hat{i} - 270\hat{j} + 540\hat{k} \text{ N}$ (630 N); $\vec{\mathbf{M}}_H = 4050\hat{i} + 2850\hat{j} - 200\hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ (4956,31 N · m)

Lo que tiene que quedarte de este taller

1. Un par no empuja: suma de fuerzas cero, momento igual en todo punto.
2. Trasladar una fuerza: la fuerza se copia idéntica y aparece $\vec{\mathbf{r}}_{\text{nuevo} \rightarrow \text{viejo}} \times \vec{\mathbf{F}}$.
3. Un par que ya existía se copia tal cual al sistema equivalente: no genera nada nuevo.
4. En el plano, fuerza-par siempre se puede volver a reducir a una sola fuerza corrida de sitio. En el espacio, no siempre: ahí aparece el torsor.