

TALLER 3

Sistemas equivalentes, resultantes y llave de torsión

Semana del programa: Semana 3, clases 1 y 2 • Tiempo sugerido: 5 horas

1. Lo que necesitas de este tema

La reducción: todo sistema cabe en dos vectores

Tengas las fuerzas que tengas —dos, siete, cuarenta— siempre puedes reemplazarlas por **una sola fuerza y un solo par** aplicados en el punto O que tú escojas:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \quad \vec{M}_O = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum \vec{M}_{\text{pares}}$$

$\vec{R}$ **no depende** del punto O : es siempre la misma suma. $\vec{M}_O$ **sí depende**: si cambias de punto, cambia. Los pares que ya existían entran directo a la suma, sin producto cruz (Taller 2).

Los cuatro casos posibles

Una vez tienes $\vec{R}$ y $\vec{M}_O$, el sistema es de uno de estos cuatro tipos:

Condición	El sistema equivale a	Nombre
$\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0$	nada: el cuerpo está en equilibrio	equilibrio
$\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$	solo un par (mismo en todo punto)	par puro
$\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$	una <i>sola</i> fuerza corrida de sitio	fuerza única
$\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$	fuerza + par <i>paralelo</i> a ella	torsor

El producto punto $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ es la prueba que decide. Hazla siempre antes de empezar a reducir: te dice a qué caso te enfrentas.

Caso “fuerza única”: dónde queda la línea de acción

Se busca el punto $\vec{r}$ tal que la fuerza sola reproduzca el momento:

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$$

En 2D esto es una sola ecuación, $xR_y - yR_x = M_O$, que describe la nueva línea de acción. En 3D es un sistema; se resuelve fijando una coordenada (por ejemplo $z = 0$) para pedir el corte con un plano.

Caso torsor: la llave de torsión

Cuando $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$ no hay manera de quitar el par. Lo que sí se puede es dejar **el par alineado con la fuerza**: eso es un torsor o llave de torsión, como un destornillador (empuja y gira alrededor del mismo eje).

Se construye en cuatro pasos:

$$\hat{\lambda} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \quad M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda} \quad \boxed{p = \frac{M_{\parallel}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}} \quad \vec{M}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda}$$

El número p es el **paso** del torsor, y se mide en metros. Lo que sobra,

$$\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}},$$

es la parte que sí se puede eliminar corriendo la fuerza. El **eje del torsor** es el conjunto de puntos $\vec{r}$ que cumplen

$$\boxed{\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_{\perp}}$$

Cómo pedirle al eje que corte un plano

Si te piden dónde el eje del torsor atraviesa el plano xz , pon $y = 0$ en $\vec{r} = (x; y; z)$ y resuelve $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_{\perp}$. Quedan tres ecuaciones con dos incógnitas, pero **una es combinación de las otras dos**: si las tres no son compatibles, hay un error aritmético antes. Esa redundancia es tu mejor verificación.

Los tres errores que hundan el punto 3 del parcial

1. Calcular $\vec{M}_O$ olvidando los pares que ya venían aplicados. Entran a la suma sin producto cruz.
2. Usar $\vec{R}$ sin normalizar al proyectar. El paso es $p = \vec{M}_O \cdot \vec{R} / |\vec{R}|^2$, con el cuadrado abajo. Si usas $|\vec{R}|$ a la primera potencia te queda $M_{\parallel}$, no p : son cosas distintas y las unidades lo delatan (N · m contra m).
3. Buscar el eje con $\vec{M}_O$ en vez de con $\vec{M}_{\perp}$. La ecuación $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$ *no tiene solución* cuando hay torsor, justamente porque $\vec{M}_O$ tiene una componente paralela a $\vec{R}$ y un producto cruz nunca puede dar algo paralelo a $\vec{R}$.

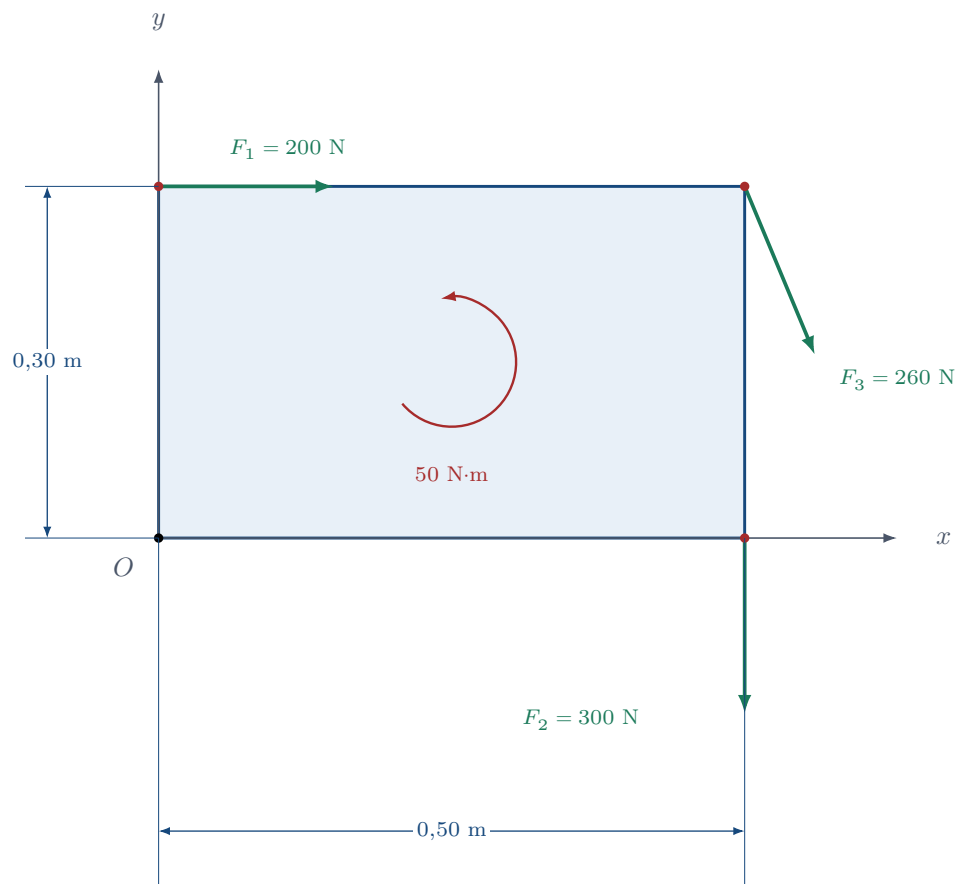
PARTE A — Enunciados

Problema 3.1 — Sistema coplanar sobre una placa

Sobre la placa actúan tres fuerzas y un par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ antihorario:

- $\vec{F}_1 = 200 \hat{i} \text{ N}$ aplicada en $(0; 0,30) \text{ m}$;
- $\vec{F}_2 = -300 \hat{j} \text{ N}$ aplicada en $(0,50; 0) \text{ m}$;
- $\vec{F}_3 = 100 \hat{i} - 240 \hat{j} \text{ N}$ (o sea 260 N) aplicada en $(0,50; 0,30) \text{ m}$.

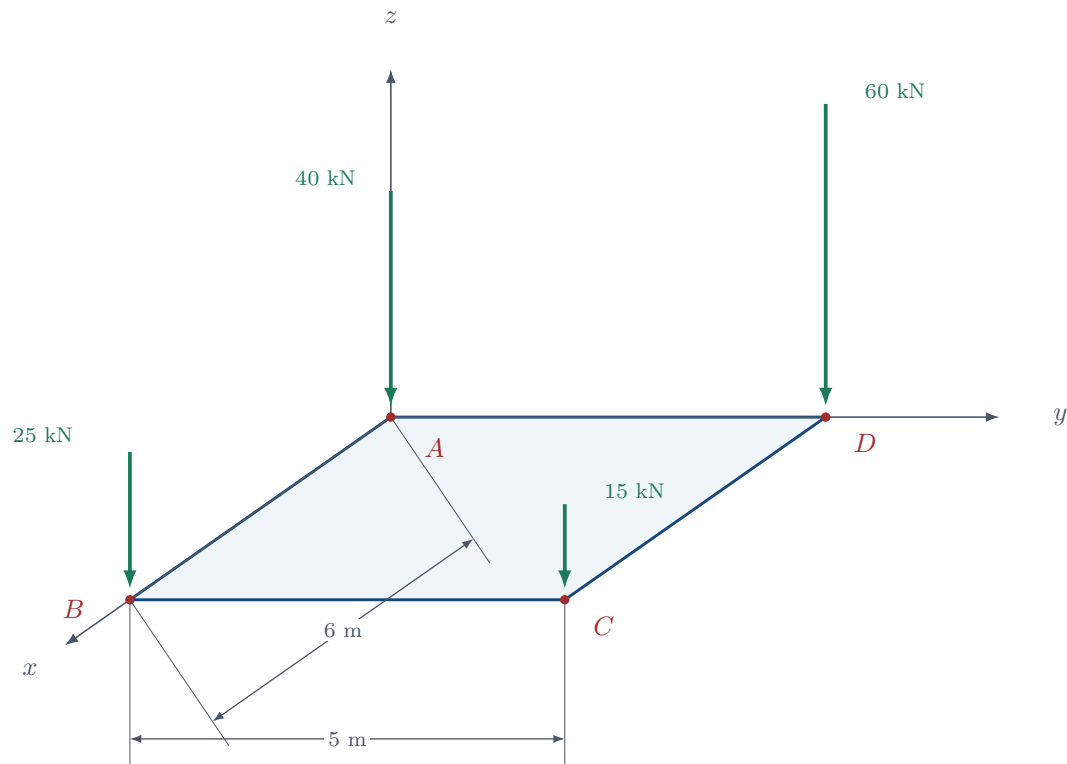
- (a) Reduce el sistema a una fuerza y un par en el origen O .
- (b) Reduce el sistema a una sola fuerza y determina dónde su línea de acción corta los ejes x y y .



Problema 3.2 — Losa con cuatro columnas

Una losa rectangular recibe las cargas verticales de cuatro columnas: 40 kN en $A(0; 0)$, 25 kN en $B(6; 0)$, 15 kN en $C(6; 5)$ y 60 kN en $D(0; 5)$, todas hacia abajo y con las coordenadas en metros.

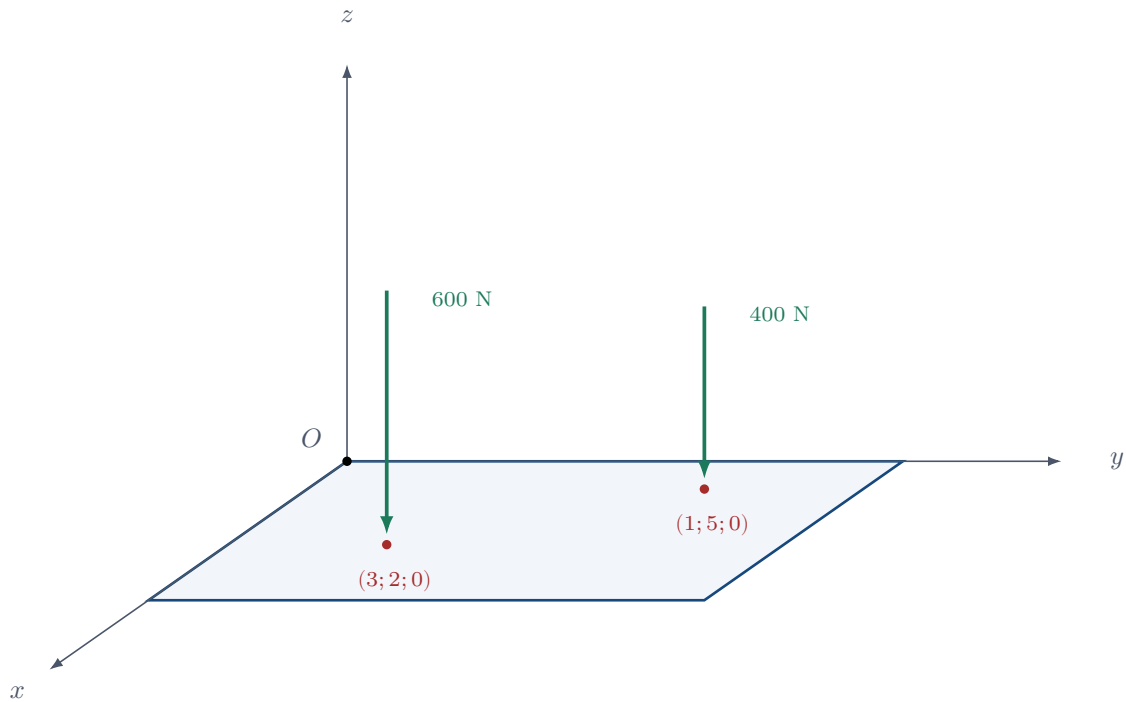
Determina la magnitud de la resultante y el punto del piso por donde pasa su línea de acción.



Problema 3.3 — Dos fuerzas paralelas en el espacio

Dos fuerzas verticales hacia abajo actúan sobre una plataforma horizontal: 600 N en (3; 2; 0) m y 400 N en (1; 5; 0) m.

- Reduce el sistema a una fuerza y un par en el origen.
- Comprueba con el producto punto que el sistema *sí* se reduce a una sola fuerza, y determina por qué punto del plano xy pasa.

**Problema 3.4 — Torsor a partir de la reducción**

Después de reducir cierto sistema al origen se obtuvo

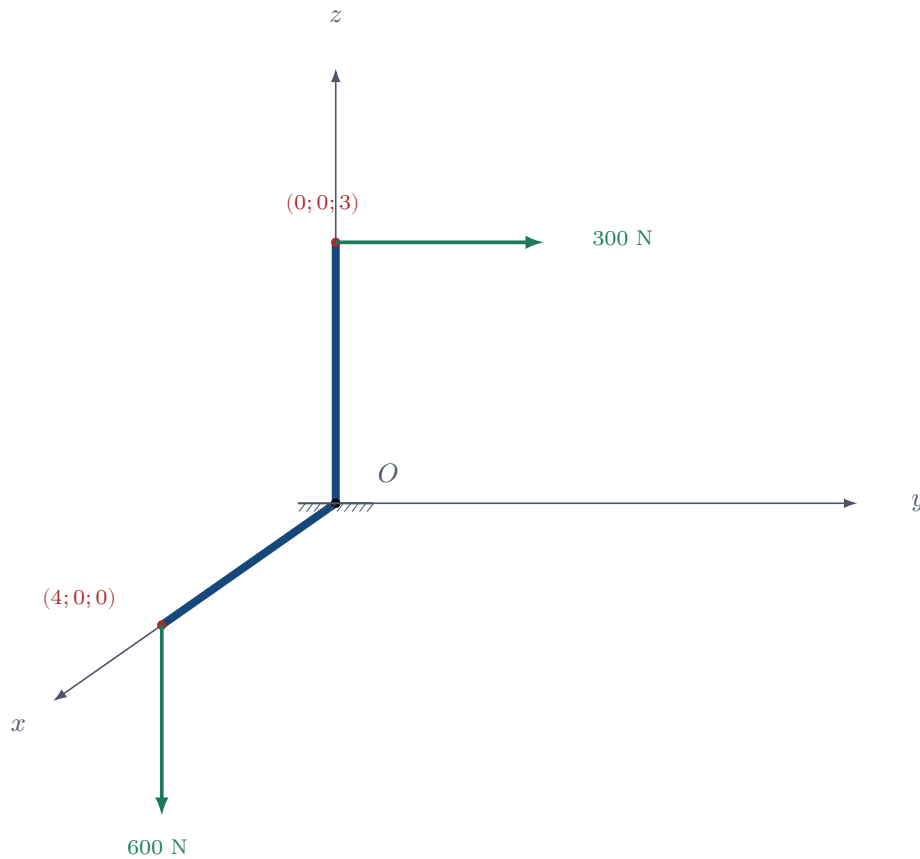
$$\vec{\mathbf{R}} = 400 \hat{k} \text{ N} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{M}}_O = 300 \hat{i} + 800 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

- Comprueba que el sistema **no** se reduce a una sola fuerza.
- Determina el paso del torsor y el momento del torsor.
- Determina el punto donde el eje del torsor atraviesa el plano xy .

Problema 3.5 — Torsor de dos fuerzas que se cruzan

Sobre la estructura actúan dos fuerzas: una de 600 N hacia abajo aplicada en el extremo del brazo horizontal, en $(4; 0; 0)$ m, y otra de 300 N en dirección $+y$ aplicada en el tope del mástil, en $(0; 0; 3)$ m.

- (a) Reduce el sistema a una fuerza y un par en O .
- (b) Determina la llave de torsión equivalente: su paso y su momento.
- (c) Determina dónde el eje del torsor corta el plano xy .

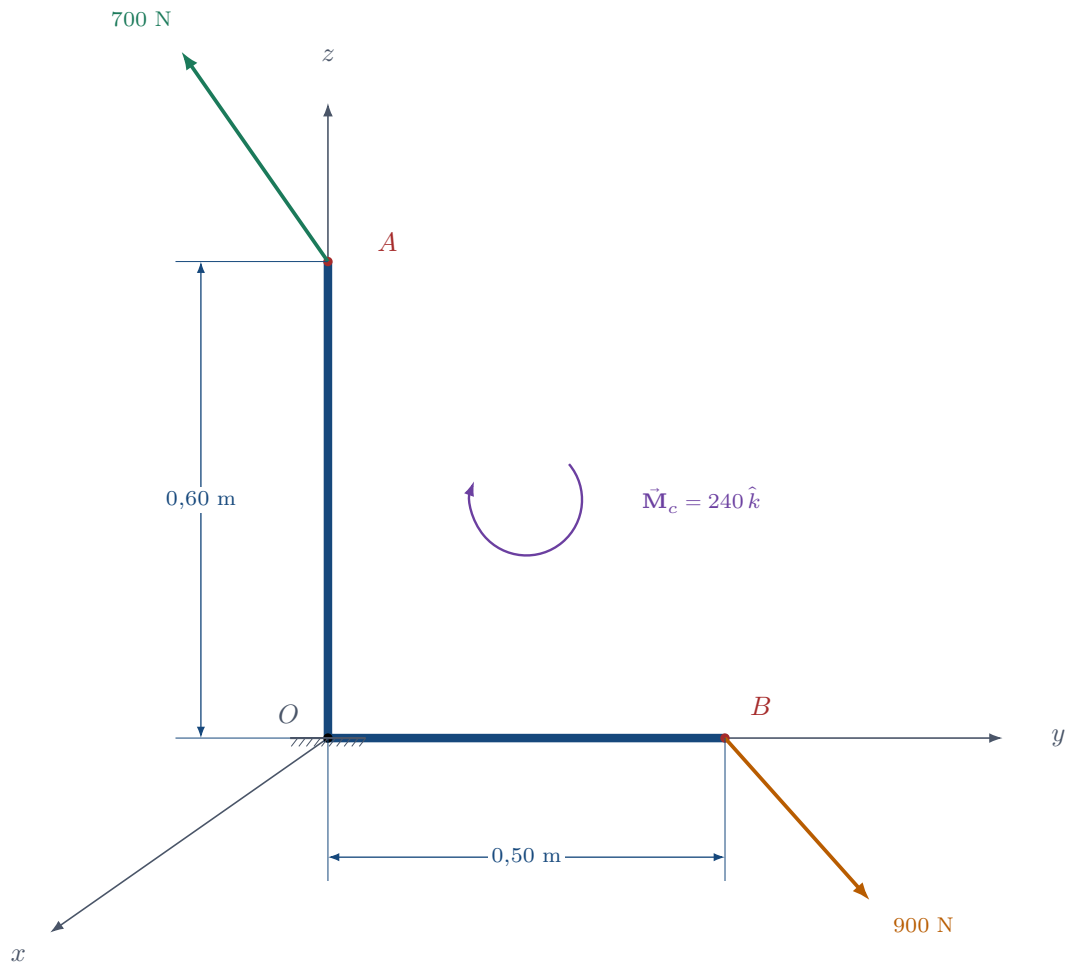


Problema 3.6 — Nivel parcial: llave de torsión completa

El soporte en L de la figura tiene un brazo vertical OA de 0,60 m y un brazo horizontal OB de 0,50 m. Sobre él actúan:

- una fuerza de 700 N aplicada en $A(0; 0; 0,60)$ m, con cosenos directores $(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7})$;
- una fuerza de 900 N aplicada en $B(0; 0,50; 0)$ m, con cosenos directores $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$;
- un par de momento $\vec{M}_c = 240 \hat{k}$ N·m.

Si es posible, reduce el sistema a una llave de torsión, indica su paso y determina el punto donde el eje de la llave interseca el plano xz .



PARTE B — Solucionario paso a paso

Problema 3.1 — Sistema coplanar sobre una placa

Ruta de solución

Sumo las tres fuerzas componente a componente: eso es $\vec{\mathbf{R}}$ y no depende de nada más. Luego sumo los momentos de las tres respecto a O y le agrego el par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ tal cual. Con $\vec{\mathbf{R}}$ y M_O en la mano, pido que una sola fuerza reproduzca ese momento y despejo dónde corta cada eje.

PASO 1 Suma de fuerzas

$$R_x = 200 + 0 + 100 = 300 \text{ N} \quad R_y = 0 - 300 - 240 = -540 \text{ N}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{i} - 540\hat{j} \quad [\text{N}]} \quad |\vec{\mathbf{R}}| = \sqrt{90\,000 + 291\,600} = \sqrt{381\,600} = 617,74 \text{ N}$$

PASO 2 Momento de cada fuerza respecto a O

Con $M_O = r_x F_y - r_y F_x$, una fuerza a la vez:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 \text{ en } (0; 0,30) : (0)(0) - (0,30)(200) = -60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_2 \text{ en } (0,50; 0) : (0,50)(-300) - (0)(0) = -150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_3 \text{ en } (0,50; 0,30) : (0,50)(-240) - (0,30)(100) = -120 - 30 = -150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 3 Agrega el par que ya venía aplicado

El par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ antihorario entra con signo positivo, sin producto cruz:

$$M_O = -60 - 150 - 150 + 50$$

$$\boxed{M_O = -310 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

PASO 4 Reduce a una sola fuerza

En el plano $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{M}}_O$ siempre son perpendiculares (uno está en el plano, el otro sale de él), así que el sistema *siempre* se puede reducir a una sola fuerza. Pido que la fuerza sola, aplicada en $(x; y)$, dé el mismo momento:

$$x R_y - y R_x = M_O \quad \Rightarrow \quad -540x - 300y = -310$$

PASO 5 Cortes con los ejes

$$\text{Con } y = 0: \quad -540x = -310 \Rightarrow x = 0,5741 \text{ m}$$

$$\text{Con } x = 0: \quad -300y = -310 \Rightarrow y = 1,0333 \text{ m}$$

Respuesta: El sistema equivale a $\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{i} - 540\hat{j} \text{ N}$ (617,74 N) junto con un par de $310 \text{ N} \cdot \text{m}$ horario en O ; y también, de forma exacta, a la **sola** fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ actuando sobre la línea que corta el eje x en $x = 0,5741 \text{ m}$ y el eje y en $y = 1,0333 \text{ m}$. Los dos cortes son positivos: la línea de acción pasa por el primer cuadrante, a la derecha y por encima de O , que es lo que hace falta para que una fuerza que apunta hacia abajo-derecha gire la placa en sentido horario.

El par de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ no se multiplica por ninguna distancia

El error clásico aquí es tratar el par como si fuera una fuerza y buscarle un brazo. El par ya es un momento: entra a la suma con su signo y nada más. Y ojo con ese signo: es antihorario (+50), así que *resta* magnitud al momento total, que era horario. Sin él, M_O valdría $-360 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Chequeo de sentido común

La distancia perpendicular de O a la línea de acción vale $d = |M_O|/|\vec{\mathbf{R}}| = 310/617,74 = 0,5018 \text{ m}$. Tiene que ser menor que los dos cortes (0,5741 y 1,0333), porque la perpendicular es más corta que cualquier oblicua. ✓

Y comprueba el corte en x directamente: una fuerza (300; -540) aplicada en (0,5741; 0) da $M_O = (0,5741)(-540) - (0)(300) = -310 \text{ N} \cdot \text{m}$. ✓

Problema 3.2 — Losa con cuatro columnas**Ruta de solución**

Todas las cargas son paralelas (verticales hacia abajo), así que la resultante también es vertical y el sistema se reduce siempre a una sola fuerza. Para ubicarla uso el mismo principio de siempre: el momento de la resultante tiene que ser igual a la suma de los momentos de las cargas, y eso da un promedio ponderado.

PASO 1 La resultante

$$R = 40 + 25 + 15 + 60 = 140 \text{ kN} \quad \text{hacia abajo} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{R}} = -140 \hat{k} \text{ kN}$$

PASO 2 Momento respecto al eje y : da la coordenada $\bar{x}$

Igualo el momento de la resultante al de las cuatro cargas:

$$R \bar{x} = \sum W_i x_i = (40)(0) + (25)(6) + (15)(6) + (60)(0) = 150 + 90 = 240 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{x} = \frac{240}{140} = 1,7143 \text{ m}$$

PASO 3 Momento respecto al eje x : da la coordenada $\bar{y}$

$$R \bar{y} = \sum W_i y_i = (40)(0) + (25)(0) + (15)(5) + (60)(5) = 75 + 300 = 375 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{y} = \frac{375}{140} = 2,6786 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{\mathbf{R}} = 140 \text{ kN}$ hacia abajo, con línea de acción por el punto (1,7143; 2,6786; 0) m. Ese punto está claramente corrido hacia la esquina D , y tiene que ser así: D soporta 60 kN, la carga más grande de las cuatro.

Es el mismo cálculo de un centro de gravedad

La fórmula $\bar{x} = \sum W_i x_i / \sum W_i$ es literalmente la del centroide, con las cargas haciendo de “pesos”. Cuando llegues a centroides en la semana 9 vas a reconocer esta cuenta: es la misma idea con integrales en lugar de sumas.

Chequeo de sentido común

El punto tiene que caer *dentro* de la losa: $0 \leq 1,7143 \leq 6$ y $0 \leq 2,6786 \leq 5$. ✓ Siempre ocurre cuando todas las cargas apuntan hacia el mismo lado. Si te saliera un punto fuera de la losa con todas las cargas hacia abajo, hay un error seguro.

Segundo chequeo, ahora vectorial: $\vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = -375\hat{i} + 240\hat{j} \text{ kN} \cdot \text{m}$, y $(1,7143; 2,6786; 0) \times (0; 0; -140) = -375\hat{i} + 240\hat{j}$. ✓ Coinciden.

Problema 3.3 — Dos fuerzas paralelas en el espacio**Ruta de solución**

Reduzco primero al origen con la definición. Luego hago la prueba del producto punto para confirmar que no hay torsor, y por último resuelvo $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$ para encontrar por dónde pasa la fuerza única.

PASO 1 Reducción al origen

$$\vec{R} = (0; 0; -600) + (0; 0; -400) = -1000\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{M}_O = (3; 2; 0) \times (0; 0; -600) + (1; 5; 0) \times (0; 0; -400)$$

Primer producto cruz:

$$M_x = (2)(-600) - (0)(0) = -1200, \quad M_y = (0)(0) - (3)(-600) = 1800, \quad M_z = 0$$

Segundo:

$$M_x = (5)(-400) - (0)(0) = -2000, \quad M_y = (0)(0) - (1)(-400) = 400, \quad M_z = 0$$

$$\vec{M}_O = -3200\hat{i} + 2200\hat{j} \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

PASO 2 La prueba que decide el caso

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-3200)(0) + (2200)(0) + (0)(-1000) = 0$$

Da cero: el sistema **sí** se reduce a una sola fuerza. No hay torsor.

PASO 3 Dónde pasa esa fuerza única

Busco $\vec{r} = (x; y; 0)$ tal que $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$:

$$(x; y; 0) \times (0; 0; -1000) = (-1000y; 1000x; 0)$$

Igualo componente a componente:

$$-1000y = -3200 \Rightarrow y = 3,2 \text{ m} \quad 1000x = 2200 \Rightarrow x = 2,2 \text{ m}$$

Respuesta: $\vec{R} = 1000 \text{ N}$ hacia abajo, aplicada en el punto $(2,2; 3,2; 0) \text{ m}$.

Verificación con el promedio ponderado

Como las dos fuerzas son paralelas, el punto tiene que ser el promedio pesado:

$$\bar{x} = \frac{(3)(600) + (1)(400)}{1000} = \frac{2200}{1000} = 2,2 \quad \bar{y} = \frac{(2)(600) + (5)(400)}{1000} = \frac{3200}{1000} = 3,2$$

Los dos caminos coinciden. Este atajo solo sirve con fuerzas paralelas; el producto cruz sirve siempre.

Que $M_z = 0$ no es casualidad

Las dos fuerzas apuntan en $-\hat{k}$, así que ninguna puede girar la plataforma alrededor del eje z : son paralelas a ese eje. Por eso $M_z = 0$ en los dos productos cruz. Reconocerlo de entrada te evita hacer cuentas que ya sabes que van a dar cero.

Problema 3.4 — Torsor a partir de la reducción**Ruta de solución**

Ya me dan $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{M}}_O$, así que empiezo por la prueba del producto punto. Como va a dar distinto de cero, sigo la receta del torsor: unitario, proyección, paso, y por último la ecuación del eje usando $\vec{\mathbf{M}}_\perp$ (no $\vec{\mathbf{M}}_O$).

PASO 1 La prueba

$$\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = (300)(0) + (0)(0) + (800)(400) = 320\,000 \neq 0$$

No es cero: **hay torsor**. Es imposible eliminar el par por completo.

PASO 2 Unitario de la resultante

$$|\vec{\mathbf{R}}| = 400 \text{ N} \quad \hat{\lambda} = \frac{400 \hat{k}}{400} = \hat{k}$$

PASO 3 Parte del momento que sobrevive: la paralela

$$M_\parallel = \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \hat{\lambda} = (300)(0) + (0)(0) + (800)(1) = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 800 \hat{k} \text{ N} \cdot \text{m} \quad p = \frac{M_\parallel}{|\vec{\mathbf{R}}|} = \frac{800 \text{ N} \cdot \text{m}}{400 \text{ N}} = 2,00 \text{ m}$$

PASO 4 Parte que sí se puede eliminar: la perpendicular

$$\vec{\mathbf{M}}_\perp = \vec{\mathbf{M}}_O - \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = (300; 0; 800) - (0; 0; 800) = 300 \hat{i} \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 5 El eje del torsor

Busco $\vec{\mathbf{r}} = (x; y; 0)$ con $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_\perp$:

$$(x; y; 0) \times (0; 0; 400) = (400y; -400x; 0) = (300; 0; 0)$$

$$400y = 300 \Rightarrow y = 0,75 \text{ m} \quad -400x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Respuesta: El sistema **no** se reduce a una sola fuerza. La llave de torsión equivalente tiene $\vec{R} = 400\hat{k}$ N y $\vec{M}_{\text{torsor}} = 800\hat{k}$ N·m, con paso $p = 2,00$ m, y su eje es la recta paralela al eje z que pasa por $(0; 0,75; 0)$ m. En otras palabras: el sistema completo equivale a empujar 400 N hacia arriba a lo largo de esa recta mientras se aplica un giro de $800 \text{ N} \cdot \text{m}$ alrededor de ella misma, como un tornillo.

Unidades: el paso son metros, el momento son newton-metro

$M_{\parallel} = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $p = 2,00 \text{ m}$ son dos cosas distintas, aunque salgan una de la otra. El paso dice cuánto avanzaría el “tornillo” por radián de giro. Si en el parcial te piden “el paso del torsor” y entregas $800 \text{ N} \cdot \text{m}$, la respuesta está mal aunque el número esté bien calculado.

Chequeo de sentido común

Reconstruye el momento original desde el torsor:

$$\vec{M}_O \stackrel{?}{=} \vec{M}_{\text{torsor}} + \vec{r} \times \vec{R} = 800\hat{k} + (0; 0,75; 0) \times (0; 0; 400) = 800\hat{k} + 300\hat{i}$$

que es exactamente $(300; 0; 800)$. ✓

Problema 3.5 — Torsor de dos fuerzas que se cruzan

Ruta de solución

Ahora tengo que construir la reducción yo mismo antes de aplicar la receta del torsor. Sumo las dos fuerzas, tomo momentos respecto a O , hago la prueba del producto punto y sigo con unitario, paso, momento del torsor y ecuación del eje.

PASO 1 Reducción al origen

$$\vec{R} = (0; 0; -600) + (0; 300; 0) = 300\hat{j} - 600\hat{k} \text{ N} \quad |\vec{R}| = \sqrt{90\,000 + 360\,000} = 670,82 \text{ N}$$

$$\vec{M}_O = (4; 0; 0) \times (0; 0; -600) + (0; 0; 3) \times (0; 300; 0)$$

Primer producto: $M_x = (0)(-600) - (0)(0) = 0$, $M_y = (0)(0) - (4)(-600) = 2400$, $M_z = 0$.

Segundo: $M_x = (0)(0) - (3)(300) = -900$, $M_y = (3)(0) - (0)(0) = 0$, $M_z = 0$.

$$\vec{M}_O = -900\hat{i} + 2400\hat{j} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

PASO 2 La prueba

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-900)(0) + (2400)(300) + (0)(-600) = 720\,000 \neq 0$$

Hay torsor. Geométricamente tiene sentido: las dos líneas de acción *se cruzan sin cortarse* en el espacio, y ese es justamente el caso en que aparece el torsor.

PASO 3 Unitario, proyección y paso

$$\hat{\lambda} = \frac{(0; 300; -600)}{670,82} = (0; 0,4472; -0,8944)$$

$$M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda} = (-900)(0) + (2400)(0,4472) + (0)(-0,8944) = 1073,31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$p = \frac{M_{\parallel}}{|\vec{R}|} = \frac{1073,31}{670,82} = 1,600 \text{ m}$$

PASO 4 Momento del torsor y momento perpendicular

$$\vec{M}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda} = 1073,31 (0; 0,4472; -0,8944) = (0; 480; -960) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}} = (-900 - 0; 2400 - 480; 0 + 960) = (-900; 1920; 960) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 5 El eje del torsor y su corte con el plano xy

Con $\vec{r} = (x; y; 0)$:

$$(x; y; 0) \times (0; 300; -600) = (-600y; 600x; 300x)$$

Igualo a $\vec{M}_{\perp}$ componente a componente:

$$-600y = -900 \Rightarrow y = 1,5 \text{ m} \quad 600x = 1920 \Rightarrow x = 3,2 \text{ m} \quad 300x = 960 \Rightarrow x = 3,2 \text{ m}$$

Respuesta: La llave de torsión tiene $\vec{R} = 300\hat{j} - 600\hat{k}$ N (670,82 N) y $\vec{M}_{\text{torsor}} = 480\hat{j} - 960\hat{k}$ N·m, con paso $p = 1,600$ m. Su eje corta el plano xy en el punto (3,2; 1,5; 0) m. Fíjate en que $\vec{M}_{\text{torsor}}$ es exactamente p veces $\vec{R}$: $1,6 \times (0; 300; -600)$ da $(0; 480; -960)$; por eso se llama “llave”, empuja y gira alrededor del mismo eje.

La tercera ecuación es gratis y es tu verificación

Las dos últimas ecuaciones del paso 5 dan la misma incógnita x , y dieron el mismo valor 3,2. Eso no es redundancia inútil: es la prueba de que $\vec{M}_{\perp}$ está bien calculado. Si las dos dieran valores distintos, el error está en el paso 4 (casi siempre en la proyección).

Chequeo de sentido común

$\vec{M}_{\text{torsor}}$ tiene que ser paralelo a $\vec{R}$, así que su producto cruz debe ser cero: $(0; 480; -960) \times (0; 300; -600)$ da $(480(-600) - (-960)(300); (-960)(0) - (0)(-600); (0)(300) - (480)(0)) = (0; 0; 0)$. ✓

Y $\vec{M}_{\perp}$ tiene que ser perpendicular a $\vec{R}$: $(-900)(0) + (1920)(300) + (960)(-600) = 576\,000 - 576\,000 = 0$. ✓

Problema 3.6 — Nivel parcial: llave de torsión completa

Ruta de solución

Este es el punto 3 típico del parcial, completo: dos fuerzas dadas por cosenos directores, un par aplicado, y la pregunta por el punto donde el eje del torsor corta un plano. La secuencia es siempre la misma y conviene escribirla en la hoja antes de calcular: $\vec{F}_i \rightarrow \vec{R} \rightarrow \vec{M}_O$ (¡sin olvidar el par!) $\rightarrow$ prueba $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \rightarrow \hat{\lambda}$, $M_{\parallel}$, $p \rightarrow \vec{M}_{\perp} \rightarrow$ eje.

PASO 1 Las dos fuerzas en componentes

$$\vec{F}_1 = 700 \left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7} \right) = 100 (2; -3; 6) = 200\hat{i} - 300\hat{j} + 600\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = 900 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) = 300 (1; 2; -2) = 300 \hat{i} + 600 \hat{j} - 600 \hat{k} \text{ N}$$

PASO 2 La resultante

$$\vec{R} = (200 + 300) \hat{i} + (-300 + 600) \hat{j} + (600 - 600) \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 500 \hat{i} + 300 \hat{j} \text{ [N]}} \quad |\vec{R}| = \sqrt{250\,000 + 90\,000} = \sqrt{340\,000} = 583,10 \text{ N}$$

La componente z se canceló sola: las dos fuerzas tienen $\pm 600 \text{ N}$ en $\hat{k}$.

PASO 3 Momento respecto a O

Con $\vec{r}_{O \rightarrow A} = 0,6 \hat{k}$ y $\vec{r}_{O \rightarrow B} = 0,5 \hat{j}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O \rightarrow A} \times \vec{F}_1 &= (0; 0; 0,6) \times (200; -300; 600) \\ &= ((0)(600) - (0,6)(-300); (0,6)(200) - (0)(600); 0) = (180; 120; 0) \\ \vec{r}_{O \rightarrow B} \times \vec{F}_2 &= (0; 0,5; 0) \times (300; 600; -600) \\ &= ((0,5)(-600) - (0)(600); 0 - 0; (0)(600) - (0,5)(300)) = (-300; 0; -150) \end{aligned}$$

Y ahora el par aplicado, que entra tal cual:

$$\vec{M}_O = (180; 120; 0) + (-300; 0; -150) + (0; 0; 240)$$

$$\boxed{\vec{M}_O = -120 \hat{i} + 120 \hat{j} + 90 \hat{k} \text{ [N} \cdot \text{m]}}$$

PASO 4 ¿Hay torsor?

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (-120)(500) + (120)(300) + (90)(0) = -60\,000 + 36\,000 = -24\,000 \neq 0$$

Distinto de cero: **sí hay torsor**. El sistema no se puede reducir a una sola fuerza.

PASO 5 Paso y momento del torsor

$$\hat{\lambda} = \frac{(500; 300; 0)}{583,10} = (0,8575; 0,5145; 0)$$

$$M_{\parallel} = \vec{M}_O \cdot \hat{\lambda} = (-120)(0,8575) + (120)(0,5145) + 0 = -102,90 + 61,74 = -41,16 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$p = \frac{M_{\parallel}}{|\vec{R}|} = \frac{-41,16}{583,10} = -0,0706 \text{ m}$$

$$\vec{M}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda} = -41,16 (0,8575; 0,5145; 0) = (-35,29; -21,18; 0) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 6 Momento perpendicular

$$\vec{M}_{\perp} = \vec{M}_O - \vec{M}_{\text{torsor}} = (-120 + 35,29; 120 + 21,18; 90 - 0) = (-84,71; 141,18; 90) \text{ N} \cdot \text{m}$$

PASO 7 Dónde el eje corta el plano xz

El plano xz es $y = 0$, así que busco $\vec{r} = (x; 0; z)$:

$$(x; 0; z) \times (500; 300; 0) = (-300z; 500z; 300x)$$

Igualo componente a componente:

$$300x = 90 \implies x = 0,300 \text{ m}$$

$$-300z = -84,71 \Rightarrow z = 0,2824 \text{ m}$$

$$(\text{tercera ecuación, de control}) \quad 500z = 500(0,2824) = 141,2 \approx 141,18 \checkmark$$

Respuesta: El sistema **sí** se reduce a una llave de torsión: $\vec{\mathbf{R}} = 500\hat{i} + 300\hat{j}$ N (583,10 N) con $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = -35,29\hat{i} - 21,18\hat{j}$ N·m y paso $p = -0,0706$ m. El eje de la llave interseca el plano xz en el punto $P(0,300; 0; 0,2824)$ m. El paso salió **negativo**: el momento del torsor apunta en sentido contrario a $\vec{\mathbf{R}}$, o sea que la llave “desenrosca” en vez de enroscar.

No olvides el par de $240\hat{k}$

Si lo dejas fuera, $\vec{\mathbf{M}}_O$ te queda $(-120; 120; -150)$ en vez de $(-120; 120; 90)$. El producto punto $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}}$ sale igual (-24000) , porque $R_z = 0$ y el paso también, así que *no te darías cuenta*: el error solo aparece al final, en el punto del eje, donde x te daría $-0,500$ en lugar de $0,300$. Escribe los pares en la lista de aportes al momento *antes* de empezar a sumar.

Chequeo de sentido común

La verificación definitiva: reconstruye $\vec{\mathbf{M}}_O$ desde el torsor y el punto del eje.

$$\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = (-35,29; -21,18; 0) + (-84,71; 141,18; 90) = (-120; 120; 90)$$

Es exactamente el $\vec{\mathbf{M}}_O$ del paso 3. $\checkmark$

Y dos chequeos rápidos de magnitud: $|\vec{\mathbf{F}}_1| = \sqrt{200^2 + 300^2 + 600^2} = 700 \text{ N } \checkmark$ y $|\vec{\mathbf{F}}_2| = \sqrt{300^2 + 600^2 + 600^2} = 900 \text{ N } \checkmark$

Respuestas rápidas

Tabla de respuestas — Taller 3

3.1	$\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{i} - 540\hat{j}$ N (617,74 N); $M_O = -310$ N·m; corta el eje x en 0,5741 m y el eje y en 1,0333 m
3.2	$R = 140$ kN hacia abajo, por el punto (1,7143; 2,6786; 0) m
3.3	$\vec{\mathbf{R}} = -1000\hat{k}$ N; $\vec{\mathbf{M}}_O = -3200\hat{i} + 2200\hat{j}$ N·m; $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}} = 0 \Rightarrow$ una sola fuerza por (2,2; 3,2; 0) m
3.4	Hay torsor; $p = 2,00$ m; $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 800\hat{k}$ N·m; el eje corta el plano xy en (0; 0,75; 0) m
3.5	$\vec{\mathbf{R}} = 300\hat{j} - 600\hat{k}$ N (670,82 N); $\vec{\mathbf{M}}_O = -900\hat{i} + 2400\hat{j}$ N·m; $p = 1,600$ m; $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = 480\hat{j} - 960\hat{k}$ N·m; eje por (3,2; 1,5; 0) m
3.6	$\vec{\mathbf{R}} = 500\hat{i} + 300\hat{j}$ N (583,10 N); $\vec{\mathbf{M}}_O = -120\hat{i} + 120\hat{j} + 90\hat{k}$ N·m; $p = -0,0706$ m; $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = -35,29\hat{i} - 21,18\hat{j}$ N·m; el eje corta el plano xz en (0,300; 0; 0,2824) m

La secuencia que debes escribir apenas empiece el parcial

1. $\vec{\mathbf{F}}_i = F_i \hat{\lambda}_i$ para cada fuerza.
2. $\vec{\mathbf{R}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$.
3. $\vec{\mathbf{M}}_O = \sum \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i + \sum \vec{\mathbf{M}}_{\text{pares}}$.
4. Prueba: $\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\mathbf{R}}$. ¿Cero? Fuerza única. ¿No? Torsor.
5. Torsor: $\hat{\lambda} = \vec{\mathbf{R}}/|\vec{\mathbf{R}}|$, $M_{\parallel} = \vec{\mathbf{M}}_O \cdot \hat{\lambda}$, $p = M_{\parallel}/|\vec{\mathbf{R}}|$, $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} = M_{\parallel} \hat{\lambda}$.
6. $\vec{\mathbf{M}}_{\perp} = \vec{\mathbf{M}}_O - \vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}}$.
7. Eje: $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_{\perp}$, fijando la coordenada del plano que te piden.
8. Verificación: $\vec{\mathbf{M}}_{\text{torsor}} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{R}}$ debe devolver $\vec{\mathbf{M}}_O$.